

1-013

新しい宇宙のイメージとその幻想。

高次元のなかにブレーンが埋め込まれていて、そのブレーンが我々の宇宙であり、そのブレーンに局在する開弦がいわゆる物質であり、ブレーン間のバルク空間に存在するのが閉弦であり重力子であるというモデルは今までになく斬新なイメージを与える。

そしてブレーン間の衝突によりインフレーションが起きそれからビッグバンに繋がり、それを繰り返す、という。

なぜ次元が10や11や、今までのように4なのか、なぜそういう固有値になりうるのか、その根本的な理由は未解決である。自由度としてのこの次元は、たまたま偶然にわれわれの宇宙では10,11あるいは4なのであり、マルチバースにおいては様々な次元と定数があるというモデルのなかにおいては自然なことである、とする。

しかし、これらのモデルは時空や次元が既にあるという前提のなかでのモデルであり、背景時空独立性の要求を満たすものではない。だから1次元の紐の振動がすべての素粒子を説明するとか、重力がバルク空間を伝搬すると考えるのは幻想の域をでない。

生命論におけるAP(オートポイエーシス)システムによる解釈では、システムはシステム自体で固有の志向性をもって自己組織化を行う。システム自体が勝手に自身を修復、編集しながら自身を構成してゆく。その延長線上にあるのが意識であり、意識が意識自身を対象化する。主-客-分裂として対象化する。対象化し我々の認識形式、概念に取り込む。対象との接点は純粹相のそれではなく、対象と自己(生物学的)との混合相のなかでの情報変換、交換による自己内での自己構成という位相空間に持ち込む。自己は自己で、対象とは関係なく自己展開し、自己構成し、自己組織化しながら稼働しているのである。

そして悟性は対象化しカテゴリー化しパターン化するなかで認識する。その果てしもなく対象化し認識しようとする悟性は限界に突き当たる。そしてこの限界の淵から主-客を超えた根源的な存在意識が現れてくる。そして存在全体を問う。本質的なものはそこから現れてくる。そのようにして充実した無知に於いて本来的に存在するものが現れてくる。これは科学的認識の途上において現れてくるのである。認識することの情熱は己の最高の高まりを通じて認識の挫折する地点に到達するのである。疑う余地のないものや今までの概念や世界観が足元から崩れ落ちるのである。そして新たな視点や見方で世界を見直すことになる。

無限に縮退した実在が様々に射影されていて、それが量子力学、統計力学、電磁気学、・・・等々の各種の法則として顕れているが、実在はそれらすべて、また未知のそれらすべてを含んでおり、それらすべてが同時に実現している。つまり実在それ自身が同時にあらゆるスケールにおいてダイナミックに無矛盾に自己完結しながら現実に実現しているということである。

実在は自らの力、論理で自らの形式のもとに自律しながら無限の自己無矛盾の表象を現象させている。悟性で理解できるものではない超越性そのものである。カントがいうように我々には決して理解できないものである。

自己自身の超越的意思に則りすべてを統合しながら自己組織化している。我々はそのことを対象化して意識するのである。我々はそれらの根源に由来するものであるが、主-客分離した我々の思惟、意識はそれらを対象のなかに捉えようとする異なる根拠から由来したものであると予感するのである。

実在の自由意思で創造できるのである。いかなる形式いかなる構造であろうと、その自由意思により存在化できるのである。そこには自己矛盾はないのである。自分以外に世界は存在しないのであるからである。

そういう意味で存在は唯一無二の超越性なのである。ニーチェがいみじくも語ったように自分の排泄物がそのまま自分の栄養素なのである。自己以外に何も存在しないのであるから自己無矛盾、自己構成、自己組織化が当たり前になされるのである。

心底、深奥から驚愕したことのない者は本質的に探求しようとしない。

そこではあらゆる人間的な価値観、社会的通念、権威、名誉が木っ端みじんに砕け散るのである。

しかしそれが本質的な現実なのである。そのことの臨場感、迫真性は新しく飛翔しようとする者に自由を与えてくれる。

芸術の本質的なもの、本質的な美、それらが4次元リアリティのなかで眼前に展開していることを覚知する。

それは悟性では捉えられない表現できない具体的でありかつ現実的な超越性である。すべてはそのなかで展開しているということが意識的に覚知され確認される場である。

1-030

世界と進化。

進化の始源においては、存在はなかった。いや無という存在のみが存在していた。何ものによっても意識によって対象化されることのない完全対称のブラマイゼロの無形式の無があっただけだった。そこにはただ存在化への潜勢・衝動だけがあった。つねに振動していて決して止むことのない衝動としての揺らぎがあった。それを「存在化への意志」と言い換えてもいいだろう。初期揺らぎの本当の起原は未だ不明である。おそらく量子重力理論と量子情報理論がその解明に寄与するだろう。

その始源においては時間も空間も物質もまだ存在していなかった。相転移による自発的対称性の破れによって時間と空間の対称性が破れていった。そして世界の自己展開(自己組織化)が始まった。この始源である特異点は形や大きさや量という概念もなく非度量衡的であり、非物質的であり、非形式的な未分化のいわば最も根源的な存在情報の始原であり、未分化の純粋な潜勢としての衝動としての揺らぎであった。時間、空間、物質もなかった。あったのは潜勢としてのエネルギー、存在化へのエネルギーとしての衝動のみがあったのだ。

現代物理学的に言えば、量子ゆらぎのトンネル効果などの量子効果による相転移によりその始源の対称性が破れた。それから時空の展開(創発・増殖)である膨張による熱エネルギーの低下とともに次々と対称性が破れていった。この辺の宇宙初期のインフレーション、ビッグバンが発生する前の時点のことや宇宙の熱史は未だ推測でしかない。(例えばループ量子宇宙論では面積や体積の最小量子から離散的な時間とともに発展していったとしている。

また、高柳らは宇宙は量子エンタングルメント・エントロピーから創発したと考えている)

エネルギーの塊ソリトンが素粒子であり構造の無いブラックホール。そしてエネルギーのループから空間が創生した。今では以前の既存概念から自由になった様々な概念で世界を表そうとしている。例えば主なものとしては、ループ量子重力理論、超弦理論、M理論、行列模型、……、等々。空間の概念、時間の概念、物質の概念、……等々に対する概念は科学史と共に変わってゆく。そしてより包括的な概念に収斂し、それらはその包括的概念の射影、近似としての意味が顕わになることだろう。私は本質的な根源は「情報」という概念であろうと考えている。

エネルギーループのネットワークの自己増殖、自己組織化から空間が現出してくる。プランクサイズ以下では空間という概念も時間といく概念も存在しなかった。プランクサイズの不連続量子が増殖して拡大してマクロ的な空間が生成され、その拡大のスケール化とともに時間という概念が創出した。という考えもある。存在の下で、それらのことが無限に発生しそれらの生成・消滅が繰り返されているということだ。

そして存在はそれらの生成・生起するすべての事象を含んだ非物質的、位相的・情報的な超越的構造・形式の存在化情報を「存在物」として自己の自己双対としている超越性そのものである。

しかし、例えばエネルギーループ、あるいはエンタングルメント・エントロピーの本質や根拠は何なのか、ということに対しては何も解っていない。これは果てしなく続く問答である。というのも存在は無限の階層構造と無限の相関関係、無限の形式から成り立っていて科学によって決して究極の固有のものにたどり着くことはないからである。それは存在の唯一無二の他にはない絶対性と、自己以外にはなにもない存在の超越性からして、そういう論理的な概念は成立し得ないからである。

マルチバースの中における一つの固有のユニバースである我々の宇宙は、固有の存在形式と構造を有するはずである。存在の下における存在物は非度量衡的で位相的に存在するのでありその存在化の表象は無限に存在する。空間という概念、それは存在の「意志」による、存在の自己双対としての存在物を存在化させる存在化形式の抽象である。時間もそうである。

そしてそれらの固有のユニバースはスカラー場という存在化の潜勢の急激な自己増殖という対称性の破れの引き金を引く。そしてこのユニバースの進化は次々と対称性の破れとそれぞれに対応する相転移により包括的、抽象的、位相的形式から人間種の認識形式にとってより具体的、物質的、形式的な構造化に転移し進化してゆく。それは空間の拡大(LQGではスピンネットワーク基底の増殖)を伴って進む。そして世界の自己超越は対称性の破れを通してしか達成されない。

世界は世界自身が創出した主-客-分裂した認識体(人間も含まれる)によって自己を知り自己説明するのである。この自己双対による自己認識の循環ループによって自己回帰を成すのである。そのために全世界は一瞬も止めることなく駆動している。

1-035

自己組織化という形成化衝動をショーペンハウアーは「意志」と言い、それは世界にあまねく駆動するものとして、森羅万象の生成・生起の根源としている。
それはヤスパースの謂うところの「包括者」であり、私が謂うところの「存在そのもの」である。

自由と束縛。

人間の自由は、人間という生物的形式の枠内での、また自己組織化という背景ダイナミズムのなかでの自由であるということ。存在という背景のなかにおける自由であり、それらを認識したうえでの自由であるということ。それらは、そういう背景の下での自由にすぎない。

完全な自由というものがあつたとしたら、それは背景非依存のもの、つまり存在しかありえない。

存在と時空。

存在が存在化させるための、存在物を存在化させるための背景形式としての時空がある。存在物の入れ物というよりも、存在の自己顕現のための存在自身の背景非依存のもの。つまり自己双対の表裏一体、主-客-統合、対称性である。

時空の生成、創発性。

スカラーポテンシャルのトンネル効果。しかしここでは時空に対する定義が曖昧である。LQGはスピンネットワークの作るトポロジーとしている。その増殖としてのマクロ展開が古典的時空である。

LQGの自己組織化仮説。べき乗的増殖とインフレーション。

それら様々なアプローチも、存在という背景のなかで起きていることである。その存在というものの正体はどこまでも思惟の、悟性の、概念の、特異点である。そのことを意識できることを自覚することができることは思惟する者に充足感と満足感、幸福感を与える。

自己組織化は、この存在と双対の非在からの、この世界の外からの圧力によるものかも知れない。
双対のプレーン。存在だけが自存するのか。永久インフレーション。

世界は認識者を必要とする。

存在を覚知し、自己認識し、世界認識し、存在認識ができるまで自己組織化は続く。存在の自己参照。

この肉体という自己組織化機構の自己形成もその枠のなかで起きている。

存在物の背景としての存在。存在の背景非依存性。時間、空間、物質の背景非依存。

なぜこのような背景非依存の存在の下で存在しなければならないのか、という根源的疑問。

自己自身が自己自身の背景であるところの唯一無二の絶対性としての存在の下にすべての存在物が存在化されていることへの根源的疑問。

相対性が意味を失う絶対的唯一性としての超越性のなかに存在していることに対する形而上学的覚醒と実存驚愕。

惨めな思考の奴隷から解放されて自由になるには、因習的思考、常識といわれてきたものや思い込み、などの呪縛から自らを解き放ち、脱地球的、脱人間的、脱生物学的、脱心理学的な視点から世界と自己を観る見方、考え方を意識的に変えることである。
実存覚醒、存在驚愕としての自己認識の下で思惟し世界定位することでしか本質的開放と自由はあり得ないだろう。

生成生起してくるこの4次元リアリティの下で、この地上で初めて、この生物学的機能によって世界を感じ見て経験するのである。そして既存の概念や考えや思考パターンをその視点から認識するのである。存在確信を得るのである。

超対称性の思惟の視点から思惟するのである。破れた対称性の相転移した世界からその始源に思惟の焦点を合わせるのである。(物理学における超対称性はどうも頓挫しそうであるが)

進化とは環境への適応や順応ではなく複雑化への進化であり、対称性の破れとともに進むのであるが、その対称性の破れである主-客-分裂によってつまり自然の自然自身による自己反照に向かって世界は生起し続けるのである。

自己組織化するこの生成生起してゆく世界のダイナミズムに直接的にリアルに参加しているダイナミズムの真っ只中にいることの感激と至福を感じ取れる者はわずかしかない。しかしこれは大いなる特権である。

現在は因果関係が生起している4次元リアリティが駆動するダイナミズム、宇宙的ダイナミズムが動的非平衡の状態にあることであり、実存はその驚くべき現実のなかにいる自己を想うのである。

現在の世界は進化過程での現時点の全体である。だからすべては進化途中の唯一の物事であり、非同一、非可換である。物理法則も物理定数も可変なものであり、それらは進化途中の過程的なものである。
すべては同じ形相を有しているが別の唯一性を有している。

我々が有する生物学的な所与の認識形式の下で世界を構成しようとするが、本質はそれらを含み且つそれらを超えたものであり、我々が認識している世界は、本質が我々の認識形式へ射影したものに他ならない。本質はそれらには構わず独自の形式と意味によるダイナミズムで作動している。

生成と存在はADM分解における時間と空間のアナロジーのようなものである。ある時点における空間に対応する状態。しかし何故に存在するのか、という疑問が切り開く次元は、それらとは全く次元を異にするものである。

我々自身もそうであるが、我々を時空のトポロジーの相関に巻き込んでいる世界も、生成生起し、つねに進化のダイナミクスの中の中にあり、生成流転のなかの現在に生きている。確率的な生成衝動とマクロな因果相関の網の目の時間的、空間的展開のなかにある。

物理法則の進化論的解釈。物理法則、物理定数が歴史的産物であるということ。このインパクトは大きい。永遠不滅であるとされてきた定数、法則自体が歴史的に変化してきた、進化の過程にあるということである。

存在、あるいはヤスパースの謂うところの包括者は特定の固定化した規定可能なものではありえないのである。存在がそうであるように。無限に多様な潜勢としての存在可能性をもたなければならないのであるから。

例えば超弦理論の正否はともかくも、真空(カラビヤウ空間)が無限にあるというのは物理的な正否はともかくも、無限にあるという予想は、そういう面では当を得ていると考えられるのである。

我々は1秒先のことも知りえないが、膨大な無限の過去を持っている。無限の過去の因果のメッシュから成り立っている。つねに現在は膨大な過去の集積であり、世界はつねに現在における世界である。過去、現在、未来が一緒になった世界ではないのである。世界とは現在における世界全体である。膨大な過去はその時点での生起した確率の結果、選択の結果の世界なのであり、その結果をもたらした無数の原因が創りだしたものであり、その事実情報だけが永遠に記録されている。

我々は原因と結果のエントロピー増大化の必然的な潜勢のなかで自由意思による選択によりそれに変更を加えようとして現在を生きている。つねに未来を選択によって展開させようとする未来への意志があるからである。

その根源は、世界自身が自己である世界を自然反照により自己認識しようとする潜勢衝動としての自己循環ループの根源的意志なのである。

それは、存在から発した生起する生成が存在との融合、対称性の融合に向かったダイナミズムであり、世界の全てはその表象なのである。我々はその経過の中の今の世界を見ているのである。

現在の標準理論。

時間も空間もない完全対称の無から宇宙が自発的な対称性の破れによって相転移を起こし、空間という自由度が創発した、というのが標準理論である。宇宙の熱史において最初の始まりの状況は、第一相転移が起きるまでは、無つまり完全対称ですべてが同根の中にあつて土ゼロで何も無かった。空間も時間も物質も。すべての力も、ボソン、フェルミオンも一体化していた無があるだけだった。そこから宇宙が自発的にかあるいは偶然にも自己展開した。

そして空間がそして時間が創発した。現代の超弦理論では空間は10次元で6次元はコンパクト化されたということになっている。空間の始原においては何次元だったのかは不明だが空間の拡大に関して最近の考えにはこういうのがある。つまり、量子多体系は無数の量子ビットの量子エンタングルメントから構成されていて、それらのすべてのスピンのエンタングルしている状態(量子臨界点)からマクロな時空が創発される、というのである。これによれば量子の関連性の絡みのネットワークが増殖していくとマクロな空間が創発される、ということである。

量子エンタングルメントのネットワークの増殖が空間の拡大であり、空間そのものはエンタングルメント・エントロピーである、というのである。つまり空間を還元化していくとそれはエンタングルメント・エントロピーの集合であるということである。しかしこういう物質の物質による還元化は果てしなく続くのである。もの自体は極め尽くせないということである。

次元に関して考えると、EE(エンタングルメント・エントロピー)のテンソルネットワークが拡大・増殖してゆく時に、何らかの物理的偏極などの相転移によってある次元がコンパクト化してしまい偏極しないで残ったのが3次元である。という考えもありえる。最初は無次元なところから相転移したかどうかは原因不明だが、11あるいは3という固有値に固定化した。このようにして、次元は無次元から固有値を持つように相転移し凝縮相状態になった。と考えることもできる。その非対称性のスケール拡張が力学的に創出した時間というのである。

この内部空間(例えばカラビ・ヤウ空間とか)というコンパクト化されている空間というものは本当に物理空間なのか疑ってしまう。それは位相学的数学空間(抽象空間)としては存在し得ているということではないのか。我々人間種が3次元空間というものの、我々の脳への射影された位相空間だ、と言うのと同じようなものか。あるいは物理空間自体は位相空間が凝縮相転移したものでしかないのかも知れない。

II B行列模型(KKLT)では次元は可変であり、時空も次元もダイナミカルに出現する、と主張する。それらは可変で創発するものとするのは妥当だろうと思われる。元々は無次元で固有値のないところから自発的な対称性の破れからによる相転移によってダイナミカルに創発・出現するという考えかたは自然である、と思われる。

原初からそれらが固有値をもっていた、と考えるのは不自然で無理があると思われる。

そのようにしてプランクスケール、プランク時間から空間の非対称化としての拡大(加速度膨張)が始まる。同時に時間の非対称化つまり時間が生成する。

しかし宇宙創成のプランク時間、プランク長の世界に今現在の既存の時空・物質概念を外挿しても意味がないかも知れない。

インフレーション解では宇宙における時間とは単調に増大する変数であり、それはスケール因子に他ならず、指数関数的な空間的膨張を起こすプランクスケールによって時間が力学的に生成されている、と考えられている。

そして世界は完全な対称性としての超対称性、統一性から非対称化し、複雑系へと変貌し、エントロピーが増大していく、と考えられている。しかし最近、その前提である超対称性は存在しないという理論も出て来た。

世界は最小作用が支配する世界である。そしてその世界のなかでは対称性と保存則の関連性のネーターの定理が支配している。そしてエントロピーの極大化(つまり自由エネルギーの最小化)がその内部構成要素としての各々の領域において支配する。量子多体系、極小分子、から超銀河系に至るまでのすべてのスケールサイズにおいてそれが支配している。それらのスケールサイズごとに支配する異なる法則が現れる。物理系における最小作用原理の下ですべては支配され、最小作用原理の下で各スケールレベルのシステムは支配されている。

自由エネルギーの極小化ということは、エントロピーの極大化と同意である。それは完全静止の関連性情報が皆無のいわゆる死である。完全対称は時間の非対称性、空間の非対称性がないいわゆる無であり死である。

それを考えると、世界は死に向かっているとも言える、生は死を回避する作動全般である、という見方が出てくる。

世界における生命現象はその無化するエントロピー極大化への反作用(抵抗)である。そしてその絶え間ない抵抗は増殖、遺伝によって引き継がれる。そういう意味で生命は自然の流れに抗している作動である。

そして我々人間種は、その始原である完全対称を遡及しているかのようである。人間種においては様々な対称性に美と価値を置いており、それに向かってあらゆる努力を惜しまないのである。完全対称は理想なのである。

対称性の自発的破れと、それ以前の完全対称性への遡及は、自然の自然自身によるダイナミズムであり、われわれ自然の産物たる人間種を介した自然の自己確認のためのダイナミズムなのではないのか、という予感があるのである。世界はその世界線上で起きている作動なのではないのか。宇宙の加速度膨張(エントロピー増大化)とエネルギー最小化の二律背反の拮抗の中での作動全般、あるいは宇宙の加速度膨張とそれに比例した加速度的な対称性への遡及性と動的平衡のなかで世界の全ては作動している、のではないのか。

始原に戻ろうとする引力と、対称性の自発的破れとしての拡大膨張としての自壊との相克の世界である。そのような人間の本質は未だかつて本質的に認識されることはなかった。

2-004

凝縮された本質のことば。

様々な哲学者、思想家から。

認識のもつ有限性から実存意識の発生とその飛翔に至るまで。悟性と科学、科学と哲学。

2-004-01.

ヤスパース

哲学入門、哲学と科学、哲学的根本知もしくは包越者の諸様態の哲学。

- ・・・その覚知においては、私の知識内容ではなく、私の存在意識が変わるのである。
- ・・・一切を根拠づける無制約者たる存在そのものもまた、対象性という形式をとってわれわれ人間の眼前に立つことになるであろう。この形式は対象性として不適切であるがゆえに再び崩壊してしまい、この崩壊のなかに包越者の現前という純粋な明晰さが残る、というような形式なのである。
- ・・・欺瞞的であった有限なものへの固定化から突き落とされることは、われわれが自由に浮動できるという可能性になり、無の深淵だと思われたものは自由の空間となり、表面的には無とみえたものは、本来的存在がそこからわれわれに語り掛けてくるものに転じるのである。
- ・・・信頼に値する律法やある権威の命令のうちにおのれの足場をつかみとろうとすると、ある種の当惑が生じてくる。これに反して、現実性全体から超越者の声を聞くという態度には、個人の責任という人を飛翔せしめるエネルギーがある。
「人間存在の位階は、超越者の声を聞き取りながら己の導きを獲得してゆく根源の深みにかかっている」。
- ・・・諸々の世界像は、常に特殊な仕方では認識された世界であって、それが誤って世界存在一般にまで絶対化されたのである。
神話的世界像とは異なる「科学的世界像」なるものは、それ自身常に、科学的手段をそなえてはいるが、その内実は乏しくて神話的であるような、新たな神話的世界像であった。
- ・・・世界そのものは認識の対象ではない。すなわち、われわれは常に世界のなかにあり、世界のなかで諸々の対象をもっているが、世界そのものを対象としてもつことはない。特に・・・もろもろの星雲という天文学での世界像や、普遍物質という数学の世界での世界像において、一定の方法による研究の地平がどれほどの広さに達し、そこでどれほどのものが見えとられようと、そうしたものはやはり現象の示す光景なのであって、事物の根拠ではなく全体としての世界ではないのである。
- ・・・むしろ、充実された無知において、本来的に存在するものが現れてくる。・・・科学的認識の途上においてのみ現れてくるのである。
- ・・・無知といっても充実され戦いとられた無知のなかにのみ、われわれ人間の存在意識の掛けがえのない源泉があるのである。
- ・・・一切の存在はわれわれの意味解釈においてのみ、われわれにとって存在しているからである。
存在者を言い表す場合、われわれは語られたことの意味を解釈することにおいてその存在者を所有しているのである。・・・存在はわれわれにとって、意味解釈との関連のうちにある。
存在とそれに関する知、存在者とそれについての我々の言葉は、多様な「意味解釈」の絡み合いなのである。
「われわれにとっての存在はすべて解釈された存在である」。
- ・・・解釈されたものは存在の現実性そのものではなく、存在がわれわれに提供しているその一様態である。
絶対的な現実性を一つの解釈によって端的に言い当てることはできない。
一つの解釈の内容を現実そのものだと考えるあらゆる見方は、われわれの知の錯誤なのである。
- ・・・われわれの持ちうる知の基本特徴は、一切の対象は現象にすぎず、認識された存在は、存在自体でも全体としての存在でもない、ということの意味している。
知の基本特徴とは、実在のすべての様態の浮動的なあり方、諸々の相対的遠近法たるに過ぎないという世界像の性格、解釈であるという認識の性格、われわれには存在が主－客分裂のなかで与えられるという事実。
- ・・・哲学することは悟性知の限界で開始される。・・・悟性という手段を用いつつ悟性以上であるような思惟がよび覚まされる。それゆえ哲学的思考は、自ら燃え立つために悟性認識の限界へと押し進んでいく。
- ・・・科学によって熟知された知を存在そのものとか全体としての存在の認識と考えるような人は、科学への迷信に隷属するものである。もはや驚愕することのない人は、もはや問いを発することもない。もはや秘密のあることに気づかぬ人は、もはや探求することをしない。
知の諸可能性の限界で得られる根本的な謙虚さによって、哲学的思考は、知の限界で知としては捉えられぬ形で姿を現すものに対する十全に開かれた態度を熟知している。

第 4 章 時空×哲学×物理学

	ページ
はじめに	104
4-001 時空の創発に関して	106
4-002 物理法則の歴史的解釈と存在	107
4-003 量子重力理論と宇宙論	108
4-004 より包括的な概念	109
4-005 時空の本質	111
4-006 機能と構造	112
4-007 世界の自己認識	113
4-008 時間に関して	
4-008-01 ヤスパース	114
4-008-02 カルロ・ロヴェッリ	116
4-008-03 エリッヒ・ヤンツ	119
4-008-04 D・ボーム	120
4-009 空間に関する哲学的アプローチ。	
4-009-01 様々な思想家の見解	121
4-009-02 ジョージ・マッサー	123
4-009-03 デヴィット・ボーム	124
4-009-04. 物理学者の見解	126
4-010 時間、空間への物理的アプローチ。 概略。	127
4-011 弦理論とループ量子重力理論の比較。	129
4-011-01 超弦理論の概略。	130
4-011-02 ループ量子重力理論 (LQG) の概略。	130
4-012 時空という概念	132
4-013 重力の量子化と、時間・空間の問題	137
4-014 情報に関して	141
4-014-01 フォン・バイヤー	142
4-014-02 D・ボーム。	143

はじめに

大きな第一級の問題がある。それは存在に関しての問題である。これはライブニッツの「24の命題」に対する明確な回答は未だない、ということにその重大性が現れている。
今後科学のようにそれが解明される日がくるのだろうか。原理的に解明することは不可能であるというのが私の考えである。

次に科学的かつ哲学的な問題として、空間、時間、物質に関する本質的な問題がある。これに関しては現在、その探究は進行中である。量子重力理論が何らかの回答を与えられるのではと考えられている。

さらに自己組織化とは本質的に何なのか、生命とは何なのか、創発とは何なのか、と次々と続く。
それで感じることは、人間種は殆どこの世界のことは知っていないのだ、ということであり、それに愕然とするのである。そういう無知の知を自覚しながら進むのが肝心である。そこには多くの素晴らしいことが待ち受けているように私には思われる。

解明されるべき科学的、物理的な問題として、私は下記のことを挙げる。

1. 物理法則の進化論的解釈。

宇宙ができる前から法則があったとは考え難い。むしろ時空の出現とともに、すべての可能な状態のなかで最も確率の高い状態として顕著さを増し、空間の膨張とともに物理法則として進化していった。
(浜田賢二)
つまり、最初から現在あるような法則性があったのではなく、時空の出現とともに、確率的に高いものがあり、それが更に様々な環境のなかで進化し現時点で定着している、というもの。

- ・物理定数が時間変化していけない理由はあるか？
- ・物理法則は宇宙と無関係に存在できるか？
- ・因果関係を持たない2つの領域を考えたととき、そこでの物理法則はまったく同じなのか？
- ・物理法則は「誕生・進化」するものか？
- ・物理法則を記述するさらに上の階層の「メタ物理法則」は存在するのか？
物理法則の「運動方程式・伝播方程式」は存在するのか？
- ・インフレーション時の膨張速度が光速を超えていることを容認しているのか？
インフレーション終了後のビッグバンを経て、その後のわりと穏やかな加速度的膨張のなかで今の光速度に落ち着いて定数的に見えているのではないか、それも時間の経過とともに変化するのではないか？

2. 対称性

対称性の破れ方こそ世界の多様性の源泉であるとされている。
ゲージ理論では、自然界の法則(相互作用)はこのような「対称性」によって規定されていると考える。

- ・質量の起源(自発的対称性の破れ)
ヒッグス場が未発現の時点では世界には重さがなかったのだが、重さが無いということは空間の曲率もなく平坦だったのか？
- ・相転移し対称性が破れたにも拘わらず、対称性が残っているのはなぜか。
 - ・エネルギー保存則 ⇔ 時間的、並進対称性
 - ・運動量保存則 ⇔ 空間的、並進対称性
 - ・角運動量保存則 ⇔ 空間的、回転対称性
- ・超対称性は破れているという指摘もあるが・・・。(大栗)
- ・相転移が起きる場合、相転移の前の状態に相転移後のすべての状態の可能性が含まれているか。

3. マルチバースと人間原理。

- ・天文学・宇宙論の歴史は、我々の存在が唯一絶対なものではなく普遍的・自然な存在であることを証明する方向に進んでいる。
- ・我々が存在する宇宙は決して唯一絶対的なものではなく無限に存在するもののなかの一例。
- ・我々の宇宙が唯一無二である必然的理由はあるか。超ひも理論では10の500乗個以上の因果的に切り離された宇宙が存在する可能性が指摘されている。
- ・これらの宇宙では物理法則が異なっているかもしれない。
- ・物理定数(重力定数、光速、素電荷、プランク定数)さらには宇宙定数の値が違っているかもしれない。
- ・異なる物理法則を持つ世界が無数に存在しているのではないか。
- ・物理法則あるいは、異なる物理定数を持つ宇宙が無数に存在すると考えて何か問題はありますか、
- ・マルチバースの存在を科学的に証明することができたとすればその宇宙は我々の宇宙・世界の一部に過ぎないことになってしまうのでは。
マルチバースは、検証可能性という立場から考えれば正統的な科学的考察対象と言えるか。

4. 要素還元的方法論の限界があるのではないか。

- この方法論の成功のおかげで20世紀の物理学は進歩した。
しかし、生物では要素に分解しては、生物と無生物の境界は定義できない
- 要素に還元すれば無個性なパーツの集合になってしまうが、それらが集まり互いに相互作用することで、全く新しい多様性(創発)できるのはなぜか？
- 世界は、複雑系の要素からの創発のようにボトムアップなのか、あるいはトップダウンなのか、はたまたハイブリッドなのか。

5. 世界はなぜ、自己言及するように作動するのか。

- 世界は、時空の創出とともに物理法則を創出し、その法則によって自身が支配されるという構造を作り出している。自己分裂(相転移)――>自己創出――>自己言及、という自己回帰ループをつねに繰り返すのはなぜか？

6. 時間とは何か。

- 時間軸の持つ非対称性の物理学的な根拠はなにか。

7. 空間とは何か。

- 空間は世界の存在において必然的なものなのか。それとも他の形式が可能なのか。存在の単なる一形式なのか。

8. 量子力学の多世界解釈。

- それぞれの可能性に対応した無数の並行宇宙が存在し、それらに次々と分岐する過程を繰り返すとした場合、その証明はできるのか。(エベレットの多世界解釈)
カルロ・ロベッリは、この解釈は、この世界の外の世界と相互作用するときに予想されることを記述しているのであって、そもそも外側の観察者など存在しない、という事実を掴み損なっている。としている。

全く異なる物理法則を有する別々の世界がそもそも情報交換が可能なのか。

9. 自己組織化の本質とは何なのか。

- 細胞はなぜ自己を複製し、自己を増殖しようとするのか。そうさせることの根底にあるものは何なのか。どういう衝動がそうさせるのか。生化学的な生体高分子の「分子・原子的な作動」だけの結果なのか。
- 発生の段階において、各々の細胞に記憶があるかのように、細胞がその器官のなかの適正な位置に自分を移動することができるのは何なのか。
- 周囲の細胞群と相互作用しながら位置決定をしているように見えるが、その行動の本質にあるものは何なのか。
- 生物において、無意識のうちに自己増殖しようとする衝動は何からきているのか。
ショーペンハウアーやニーチェであれば「意思」や「権力への意思」と言うだろうが、それだけの理由か。

・・・この他にも様々な疑問がある。

現代科学は帰納と演繹との相互関係のフィードバックから成り立っている。

「個別から一般への推論」、「普遍から特定への回帰」が科学思考の本質である。
観察や経験から理論へ至る「帰納的な思考の飛躍」。これは論理的や組織的な推論ではなく、「人間の知性の自由な創出」である。閃きや想像、創案や直観、洞察や本能、などを含んでいる。

帰納法による推論から得られた「公理」があり、その「基本的法則」から、演繹的に推論で得られる複数の「命題」があり、その理論的な予測としての命題を実際の観測によって比較する。このフィードバックからなる。
そして重要なのは、最低限の仮定や公理からの論理的導出によって、最大限の経験的事実を説明すること(節減の原理)である。

※ 科学をやればやるほど、科学探究によって存在物と存在物の関連性を探究すればするほど、「存在とはなにか」、「存在しているとはどういうことか」という究極的な根本的な問題に突き当たるのである。

第 5 章。 システム論

本篇は、本シリーズ「続編－Ⅲ」(NO-4) への追記事項である。

	<u>ページ</u>
5-001 システム論の傾向	145
5-002 生命とシステム論	146
5-003 サイバネティクス論	149
5-004 システム論	152
5-005 システム論の比較	153
5-006 オートポイエーシスへの評価と比較。	156
5-007 生物制御システム	160
5-008 神経、細胞、免疫システム	
5-008-01 神経システム	162
5-008-02 細胞システム	162
5-009 遺伝子編集	164
5-010 生命と宇宙	165
5-011 脳、意識、時間、意志。	167
5-011-01 自己組織化と自己意識の発生	170
5-011-02 自己組織化の本質	172
5-012 相転移、臨界現象	175
5-013 自己組織化臨界現象	175
5-014 カオスの縁、臨界現象	177
5-015 細胞間および細胞内シグナル伝達	178

5-005

システム論の比較。

システム論はまだ厳密に分類できる状態ではないと思われる。またオートポイエーシス論は確定していない。現在進行形であるが、自己組織化論も完結しているわけではない。

世代別に分類したシステム論。(第一世代、第二世代、第三世代)

(有機体論を、1. 部分－全体関係、2. 階層関係、3. 生成、などによって次の三つに分類される)

	第1世代	第2世代	第3世代
システム タイプ	動的平衡システム	動的非平衡システム	自己生成システム
主概念	ホメオスタシス (自己維持する有機体)	自己組織化 無機的現象の自己組織化。	オートポイエーシス
概念分類	自己維持システム	自己組織化システム	自己産出システム
	有機構成	組織化	生命化
	関係	生成	産出
	自己閉鎖系、環境開放系	自己開放系、環境開放系	内と外の消滅
	階層既存	階層形成	階層消滅
	自己既存	自己形成	自己産出
	量から質への転換	対立物の相互浸透	否定の否定
有機体の 3支柱	生成は定常維持の下での変化。 階層構造を前提にする。	階層そのものの生成。	行為存在論 産出的作動によって存在する
主要概念	・環境と相互作用しながら自己 維持する機構 ・動的な開放性のうちで均衡を 継続する ・関係	不断に生成プロセスを反復する 動的非平衡	自律性 個性 入力、出力の不在
研究者	ベルタランフィ(一般システム論) N・ウィーナー(サイバネティクス) ラズロー	プリゴジン(散逸構造) アイゲン(ハイパーサイクル) ハーケン(シナジェティクス)	マトウラーナ(オートポイエーシス) ヴァレラ(オートポイエーシス) ルーマン(社会システム理論)
モデル	開放系の動的平衡システム (環境と相互作用しながら自己維 持する機構) 物質代謝する有機体。物質代謝 ながら自己維持	・開放系として環境と物質・エネ ルギー代謝をしながら自己形成 ・システムの現象は不断に生成 プロセスを反復する動的非平衡 成長する結晶、発生胚。	・神経システムから出発し、細胞、 免疫システムに拡大した。 神経、細胞、免疫システム
自己維持	第1世代 ホメオスタティックな自己維持 機構(恒常性) 開放系のまま定常性を維持する。	第2世代 ・開放系として環境と代謝をし ながら自己形成し、システム の形成を通じて周辺条件を変化 させる。	第3世代 ・自己触媒的な自己言及システ ム自分自身を不断に生成し続 ける ・自らの作動で自己を決定する システム論。
関数表示	$f(x, y, z, \dots, \alpha, \beta, \gamma)$ x,y,z はエネルギーや空間位置な の状態変数。α、β、γは調節因 (機能系)	$f(x, y, z, t, \square, f, f^2, f^3, \dots) + \alpha$ x,y,z はエネルギーや空間位置な の状態変数。時間t, □はシステム の作動を通じて獲得する変数 f, f ² , f ³ は関数そのものが変数 自己言及性を表す。自己触媒プロセス αは環境との作用による摂動項。 ゆらぎは□、αに含まれている。	$f(\square, \square, \square, \square, \dots)$ □はシステムの作動を通じて獲得 する変数。□にf そのものが入る 場合があり、自己言及的に作動。 作動の結果として決まる。

	第1世代	第2世代	第3世代
基本視座 (規定)	x, y, z……は、エネルギー 形態や各種機能系の状態の指標 変数で、 α , β , γ は調整因子 。システムに平衡が保たれている ので時間変数でない。 第一世代は時間の関数ではない	システムは非平衡だから時間の 変数がある。□はシステムが作動 しつつ新たに獲得する変数で、 f, f2, f3 ……は、この 関数そのものが自己言及的に関 わることを示す変数。	□はシステムが作動しながら 獲得する変数。 この方程式の変数は全て未知で ある。 要するに何も決まっていない 関数に近い。
構成要素	- 動的平衡の結果である「関係」 - 構造主義的。 - 観測者により物理的空間的閉域として捉える。 「構造」の組織化	- 生成。 - 不断に空間的形態を変えてゆく - 継続的に成立するためには予め 空間構造が用意される必要がある - 不断に生成プロセスを反復する 動的非平衡	産出プロセスを基本にする。 産出プロセスの関係からなるネットワ ーク。 システムが作動することで初めて 自己が定まる。自己創出システム 規定には時間も空間も含まれていない。 「システムそのもの」の組織化 生成プロセスの円環的作動の空間 構造を自身で構成する。 位相的構造分析。位相空間の導入 中央指令機関の不在 自己言及 有機体は自分の構成要素を 産出する 作動が自己自身に回帰してゆく 自己触媒的な自己言及 構成要素を産出するシステムで、 構成要素は要素でも部分でもない
階層関係	- 目的－手段、自律－従属 - 動的平衡に達し安定した階層 間の関係を取り出す。	- 自己生成をへて秩序が形成さ れる。階層が形成される。 - 各階層が階層として形成され ている - 階層生成は自己組織システム の要となる機構 1. 要素の相互作用による 階層生成 2. 円環形成による階層形成) 3. 自己触媒システム (ハイパーサイクル) 初源的な 「自己言及的サイクル」	階層の消滅 内部に階層関係を持たない
入/出力 境界	不可欠 (観察者からの視点) 境界前提	境界設定 境界は不断に変化する 境界形成	自分自身の作動によって自身の境界を 区切り産出する (システム内部からの視点) 境界の自己決定
形態	定常的な形態や定常的関係の維持	- 連続的に生成プロセスを行うた めに静止しているように見える システムの表現 - 不断に「生成プロセス」を反復 する動的非平衡 - 自らの作動に応じて自在に形態 を変える(メタモルフォーゼ)	システムの作動を中心に組み立て られたシステム論

・システム論。

第1世代	第2世代	第3世代
・情報理論。(フォン・ノイマン) ・ゲーム理論。 ・決定論 ・トポロジー(位相数学) ・ホロン ・多階層関係論 ・構造主義生物学。 ・ホメオスタシス論(キャノン) ・サイバネティックス(ウイナー)	・散逸構造論 (プリゴジン) 無機的現象の自己組織化 ・後成的プロセス理論(ウオディントン) ・シェリングの自然哲学 ・シナジェティックス(ハーケン) ・ハイパーサイクル。(アイゲン)。 循環的自己組織化機構 ・階層形成論 ・自己組織化システム論 (エリッヒ・ヤンツ)	・自らを作り出していく力をもつ ・中央指令機関の不在 ・産出関係の循環。自己触媒的。 ・自己回帰的かつ自己言及的。 ・作動が自己自身に回帰 ・自分自身を不断に生成し続ける ・自らの作動によって内部、外部を区別 ・徹底的に時間化されたシステム ・オートポイエーシス論。 (マトウラーナ、ヴァレラ)カント。 ・社会システム理論(ルーマン)

オートポイエーシス論はまだ明確に確定できない面が多々ある。まだ仮説の位置にある。

5-006

オートポイエーシスへの評価と過去の理論との比較。

オートポイエーシス論は答えを出したのではなく問いを提示したにすぎない。成功も完結もしていない。むしろ、奇をてらう感が否めない。

賛否両論の仮説であるが、いろんな矛盾を抱えている、と私は感じる。

私は第二世代の動的非平衡の理論を継承・発展していく方が順当な方向だと思う。オートポイエーシス理論は、余りにも革命的な理論にしたてるといふ意図がみえる。その分だけ矛盾が露呈する。

第二世代の動的非平衡の理論もまだ発展途上であり、現在も進行しているものである。

オートポイエーシスが情報概念や自己言及性が担う秩序や組織の構成要件を「産出概念」にまで繰り込むのは、「柔軟性と変容可能性のダイナズム」を実現するためである。このような変幻自在に自己を形成する機構を、産出概念を前景化することで定式化しようとしたことがオートポイエーシスという理論である。

「産出」という概念を、いくつかの実験や情報概念への批判を通じて有機構成を前景化したことによって顕在化したのが、オートポイエーシスである。

マトウラーナとバレラは、オートポイエーシスのシステムにおいて、外部との物質やエネルギーのやり取りが組織構成を決定するようなものではないということを、オートポイエーシスのシステムは「入力と出力を持たない」と表現した。これは、観測者がシステムと環境との区別を設けた上でそれらの入出力に注目するような、一般的に理解されているシステムの概念とは全く異なる。

しかしこの「入力と出力を持たない」という表現に関しては異論が多い。

「自分が作動して自己循環的な閉域を作り、内・外の区別を作っていることさえ知らない盲目作動機関」。

「自分」も「環境」も全く眼中になく、それらの存在に気づいていない。ただ「作動するだけ」。

その内・外は「観察者」がはじめて区別できる。入力や出力がない、というのも、「盲目のオートポイエーシスにはその入力・出力が見えないし、存在しない」ということと同意。

主観主義のオートポイエーシスから見れば内しかなく、客観主義の観察者から見れば外しかないから、両者ともに「内・外はない」と言っている。「内・外はない」といえば一切の空間的な概念が立ち消えになる。

位相空間内で作動する、という考えにもちょっと違うのではと考える(機能主義的位相空間)。

奇妙な「位相空間内の物質」。

既存のシステム論が、環境内でのシステムの調整機構についてのみ言及し、システムの環境外およびシステムの「自己言及」を等閑視していたという限界を打破しようとする試みとして受け取られた。

構成要素の作動の過程が最終的にその「構成要素自体を作り出す円環的な組織的特性」が指摘されているのと同時にそのことによってネットワークが自己とそうでないものとの境界を自ら決定づける。

オートポイエーシスとは、「創発的な産出概念」である。それは「構成素の産出を通じて産出活動を自己触媒的に持続すること」と産出活動の様相によって「特定の機能や離散的な構造を構築する」ことが、二重に作動している創発的過程である。自己形成とはこのような「二重性」において日々産出しつづける過程である、としている。

オートポイエーシスは、「自己言及的な自己組織化理論の一つである」、というのが一般的な理解である。

実際の生命現象を踏まえ、それを理論化するために考案された理論である。

設計図やリーダーは不要で、構成者の行為のプロセス間の関係だけをコード化することで自己制作(オート・ポイエーシス)していく。

カエルの視覚における「見る」という行為は、カメラのような機械とは全-違うことが判明した。

1. 網膜の神経細胞は、現象の全てに反応しているのではなく、選択的に反応していることが判明した。

有機体はそれぞれにふさわしい視覚機能を選択的に獲得しているのである。それゆえ同じ環境の中に棲息していても、カエルが見る環境とハエが見る環境はそれぞれ違う。

2. マトウラーナはハトの色覚の神経活動を研究した。

視覚は主に三つの神経回路を持ち、それらが並行に処理されている。そして色の認知と形態の認知はそれぞれ別の回路で独自に処理されている。色は形の情報に依拠することなく独自に色を構成しなければならない。さらにヒトの色覚は青、緑、黄色に反応する受容器によって構成される三色性であるが、ハトは四色性である。

それゆえ、それぞれの有機体の多様な色彩経験を、有機体の神経細胞の活動という物理的特性に特定するという方法によっては解明できないことになる。

第 6 章 複 雑 系

	<u>ページ</u>
6-001 複雑性システム	181
6-002 複雑系の原理	182
6-003 複雑系ネットワーク	185
6-003-01 非線形科学とネットワーク	188
6-003-02 スモールワールド・ネットワーク	190
6-004 複雑性の哲学	191
6-005 エネルギー、エントロピー、シナジー	193
6-006 非線形系。	
6-006-01 カオス	194
6-006-02 フラクタル(自己相似性)	196
6-006-03 ソリトン	198

6-003

複雑系ネットワーク。

ノードとリンクからなる抽象化されたネットワークの上に実体に乗る。

グラフ理論での点をネットワーク科学では、点、ノード、バーテックス、辺を、辺、エッジ、リンクなどという。
エッジに向きを与えたものを有向グラフ、そうでないものを無向グラフという。

次数は、ノードが持っているエッジの本数。特に次数の多いノードがハブ(hub)。

・平均パス長。

$$L \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L_i, \quad L_i \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} l_{ij}$$

l_{ij} : ノード i と j を最短パスで繋ぐのに必要なエッジ数。
ノード i に対してパス長の平均値 L_i を求め、それを全ての i に対して計算する。

・クラスター係数。

クラスターの形成は、自分の友人同士が互いに友人の場合になりたつ。
(以下は、3個のノードが互いに1本のエッジを介して繋がっている場合)

実現可能なクラスターの数。

$$C(k_i, 2) = \frac{k_i(k_i - 1)}{2}$$

ノード i が k_i 本のエッジを持っていた場合。

k_i 個のノードから2つのノードを選ぶ組み合わせの数になる。

ネットワークのクラスター係数。

$$C \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i, \quad C_i \equiv \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}$$

実際のネットワークでは、上記の場合は稀で、そのうちの一部しか実現されていない。

係数は、実際に存在しているクラスターの数 E_i を可能なクラスターの数で割る。

C_i は、全ノードから一様ランダムに選ばれたノード i に着目した時、その友人同士が互いに友人である確率に等しい。 C はその確立を平均した量。

大域的なクラスター係数。

$$C_{global} \equiv \frac{3 \times \text{ネットワーク内の三角形の数}}{\text{連結ノード三つ組の数}}$$

全ての三つ組から一様ランダムに選ばれた連結したエッジ対に注目し、それが三角形を作る確率。

連結ノード三つ組とは、ノード一つ(a)に、ノード2つ(bとc)が繋がっている3つのノードを指す。
bとcが繋がっていれば三角形ができる。

分子の”3”は、一つの三角形△abcに内在する三つ組3つの組み合わせ(a-b-c, b-c-a, c-a-b)を勘定するため。

・次数分布。

$p(k)$: ネットワークの全ノードから一様ランダムに選ばれたノードの次数が k である確率。

・次数相関。

エッジの両端ノードの次数に、どれくらいの相関があるかを調べる。

・ネットワークの特徴付け。

ノードのもつどのような特徴が、ノード対を繋ぐエッジの有無に影響を与えているかを調べる。
(年齢、人種など)

次数とクラスター係数の相関、階層構造、中心性、モチーフ、スペクトル、・・・。

・ネットワークの種類。

振動子が多数ある場合。

ランダム・ネットワークで振動子を接続した系でも、同期・非同期転移が存在する。

「位相差が固定された振動数同期状況が、集団内の一部の振動子群で達成される」。

全体の振動数分布の幅と結合強度がほぼバランスした時に初めて同期が始まる。

そうでない場合は同期は全く起こらない。

・ERネットワークとSFネットワーク。

- ・ランダム・ネットワークは、完全にランダムなネットワーク。すべてのノードのペアに対して確率 p で接続している。
 $(0 \leq p \leq 1)$ ERネットワークともいう。すべての振動子が同程度の結合数をもつ。

1振動子当たりのリンク数を減らしても、その分リンク当たりの結合強度を増加させる必要がある。
 同期は能率的でない。

- ・スケールフリー(SF)・ネットワークは、次数の分布が特殊な形になり、「結合強度が偏在」している。
 入力と出力が集中している「ハブ」がある。

ハブの構成するサブネットワークは、かなり低い結合強度でも同期できる。

SFネットワークの場合は、分布の偏りが大きくなると、同期に必要な結合強度が劇的に下がる。

また分布の広がりERネットワークよりも大きい。つまり同期の効率が非常に良い。

どんなに小さな結合強度でもマクロリズムが生まれる。

SFネットワークのように一部の振動子に結合数を集中させたほうが、低い結合強度でも同期が可能。

・ハブの重要性。

SFネットワークには入力と出力が共に集中している「ハブ」がある。そしてハブが構成するサブネットワークはかなり低い結合強度でも同期できる。一旦たとえ少数でも一部の振動子集団が同期すれば、ネットワークはマクロなリズムシグナルを生成する。これが他の結合数のやや少ない振動子群も同期させて集団振動の振幅を増加していく。

少数のハブが同期の核をまず作り、これが結合数の少ない集団を引き込んでいながら成長する。

「ERネットワークのように全ての振動子が同程度の結合数をもつよりも、一部の振動子に結合数を集中させるSFネットワークの方が極端に低い結合強度で動機が可能であり、はるかに能率的である」。

1. ランダム・ネットワーク。

2つのノード間をエッジで繋ぐ確率を、他のエッジの存在とは独立に一定とする。

ノード数は n 。次数は k 。平均次数は pN 。

次数分布は2項分布。

$$p(k) = \binom{n}{k} \theta^k (1 - \theta)^{n-k}$$

平均パス長。

$$L_{rand} \sim \frac{\log N}{\log \langle k \rangle}.$$

平均次数 $\langle k \rangle = n \theta \equiv z$ を一定にして、
 $n \rightarrow \infty$ にすると、
 ポアソン分布になる。

$$p(k) \simeq \frac{z^k e^{-z}}{k!}$$

クラスター係数。

$$C_{rand} \sim \frac{\langle k \rangle}{N}.$$

・ランダム・ネットワークの特徴。

平均パス長が、ネットワークの大きさ N の対数 $\log N$ に比例する。

クラスター係数は、ネットワークの大きさ N に反比例する。

2. レギュラー・ネットワーク。

等しい次数 k をもつノードが、規則正しく配列されたもの。

1次元リング状ネットワークの場合。

平均パス長。

$$L_{reg} = \frac{N(N + k - 2)}{2k(N - 1)} \sim \frac{N}{2k}.$$

クラスター係数。

$$C_{reg} = \frac{3(k - 2)}{4(k - 1)}$$

・平均パス長がネットワークの大きさ N に比例する。

第7章 量子重力理論の周辺

	ページ
7-001 時間、空間概念の変遷の概要。	200
7-001-01 私の考える時空概念。	204
7-002 時間、空間、物質に関しての様々な方面からの見解。	205
7-003 ゲージ原理に関して。	206
7-004 標準理論と統一方程式に関するメモ。。	209
7-005 自発的対称性の破れを考慮したラグランジアン。	213
7-006 重力の量子化の試み。	217
7-007 エントロピーとの関係。	219
7-008 宇宙は量子エンタングルメントから創発する。	222
7-008-01 量子誤り訂正符号とゲージ重力対応。	224
7-009 大統一理論に関してのメモ。	225
7-010 M理論の定式化と関連事項。	229
7-011 Dブレーンに関係すること。メモ。	230
7-012 M理論の行列模型。	231
7-013 超弦理論の非摂動的定式化。	232
7-014 IIB行列模型の主張。	234
7-015 IIB行列模型の概要。	235
7-016 天文学、宇宙論、超弦理論の年表。	238
7-017 素粒子の分類表。	239

7-005

自発的対称性の破れを考慮したラグランジアン。

1. $\mathcal{L}_{Higgs}$ は、以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Higgs} &= -(D_\mu \Phi)^\dagger D^\mu \Phi - V_\Phi \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \frac{g^2 v^2}{4} \left(W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{Z_\mu Z^\mu}{2 \cos^2 \theta_W} \right) \left(1 + \frac{H}{v} \right)^2 - \lambda v^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{2v} \right)^2 \\ \text{結合定数 } g \text{ は、} &g = \frac{e}{\sin \theta_W}, \quad g' = \frac{e}{\cos \theta_W} \quad \text{の } g \text{ と置き換える、と。}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Higgs} &= -\frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H - \lambda v^2 H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 \\ &\quad - \frac{e^2 v^2}{4 \sin^2 \theta_W} W_\mu^- W^{+\mu} - \frac{e^2 v^2}{2 \sin^2 2\theta_W} Z_\mu Z^\mu - \frac{e^2 v}{2 \sin^2 \theta_W} W_\mu^- W^{+\mu} H \\ &\quad - \frac{e^2 v}{\sin^2 2\theta_W} Z_\mu Z^\mu H - \frac{e^2}{4 \sin^2 \theta_W} W_\mu^- W^{+\mu} H^2 - \frac{e^2}{2 \sin^2 2\theta_W} Z_\mu Z^\mu H^2\end{aligned}$$

- ・第1、第2項は、ヒッグス場の自由ラグランジアン。
- ・第3、第4項は、ヒッグス場の自己相互作用項。
- ・第5、第6項は、ゲージ場 W 、 Z の質量項。
- 他の項は、ゲージ場とヒッグス場の相互作用項。

2. ゲージ場のラグランジアン。

下記の式とグルーオンのラグランジアン密度を合わせたもの。

下記の、1)式とグルーオンのラグランジアン密度の2)式を合わせたもの。

1).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{gauge}}^{\text{EW}} &= -\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) \\ &\quad - ig \sin \theta_W [(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W^{+\mu} A^\nu \\ &\quad \quad - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W^{-\mu} A^\nu + A_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu}] \\ &\quad - ig \cos \theta_W [(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W^{+\mu} Z^\nu \\ &\quad \quad - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W^{-\mu} Z^\nu + Z_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu}] \\ &\quad - g^2 \sin^2 \theta_W (W_\mu^- W^{+\mu} A_\nu A^\nu - W_\mu^- W_\nu^+ A^\mu A^\nu) \\ &\quad - g^2 \cos^2 \theta_W (W_\mu^- W^{+\mu} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^- W_\nu^+ Z^\mu Z^\nu) \\ &\quad - g^2 \sin \theta_W \cos \theta_W [2 W_\mu^- W^{+\mu} A_\nu Z^\nu - W_\mu^- W_\nu^+ (A^\mu Z^\nu + A^\nu Z^\mu)] \\ &\quad - \frac{g^2}{2} [W_\mu^- W^{+\mu} W_\nu^- W^{+\nu} - W_\mu^- W^{-\mu} W_\nu^+ W^{+\nu}]\end{aligned}$$

- ・ゲージ場の自由項
- ・3次の相互作用項
- ・4次の相互作用項
- ・ゲージ場どうしの相互作用項

2). グルーオンのラグランジアン密度。

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}}^{QCD} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$$

ちなみに、ここで「強い相互作用に関するラグランジアン密度」は下記になる。

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_{\text{gauge}}^{QCD} + \mathcal{L}_{\text{quarks}}^{QCD} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} - \sum_f \bar{Q}^f (i \not{D} + m_f) Q^f$$

6種類の3重項 $Q^f (f = u, d, c, s, t, b, \text{ or } f = 1, \dots, 6)$

1)と2)を合わせたラグランジアン密度。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{gauge}} = & -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) \\
& - ie \left[(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W^{+\mu} A^\nu - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W^{-\mu} A^\nu + A_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu} \right] \\
& - ie \cot \theta_W \left[(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\nu W_\mu^-) W^{+\mu} Z^\nu - (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) W^{-\mu} Z^\nu + Z_{\mu\nu} W^{-\mu} W^{+\nu} \right] \\
& - e^2 (W_\mu^- W^{+\mu} A_\nu A^\nu - W_\mu^- W_\nu^+ A^\mu A^\nu) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^- W^{+\mu} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^- W_\nu^+ Z^\mu Z^\nu) \\
& - e^2 \cot \theta_W [2 W_\mu^- W^{+\mu} A_\nu Z^\nu - W_\mu^- W_\nu^+ (A^\mu Z^\nu + A^\nu Z^\mu)] \\
& - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} [W_\mu^- W^{+\mu} W_\nu^- W^{+\nu} - W_\mu^- W^{-\mu} W_\nu^+ W^{+\nu}]
\end{aligned}$$

3. 物質場のラグランジアン密度。

$$\begin{array}{ll}
\text{レプトンのSU(2) 2重項 } E_L^I & \quad 1\text{重項 } e_R^I \\
\text{クォークの2重項 } Q_L^I & \quad 1\text{重項 } u_R^I, d_R^I
\end{array}$$

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \{ -\bar{E}_L^I i \not{D} E_L^I - e_R^I i \not{D} e_R^I \} + \{ -\bar{Q}_L^I i \not{D} Q_L^I - \bar{u}_R^I i \not{D} u_R^I - \bar{d}_R^I i \not{D} d_R^I \}$$

上の式を共変微分の具体的な形に直す。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{fermions}} = & -\bar{\nu}_L^I i \not{\partial} \nu_L^I - \bar{\psi}^I i \not{\partial} \psi^I - \bar{u}^I i \not{\partial} u^I - \bar{d}^I i \not{\partial} d^I + e \left[\bar{\psi}^I \gamma^\mu \psi^I - \frac{2}{3} \bar{u}^I \gamma^\mu u^I + \frac{1}{3} \bar{d}^I \gamma^\mu d^I \right] A_\mu \\
& - \frac{e}{2 \sqrt{2} \sin \theta_W} \left[V_{\text{PMNS}}^{I\prime\prime} \bar{\psi}^I \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_L^I W_\mu^- + V_{\text{PMNS}}^{I\prime\prime *} \bar{\nu}_L^I \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi^I W_\mu^+ \right. \\
& \quad \left. + V_{\text{CKM}}^{I\prime\prime} \bar{u}^I \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d^I W_\mu^+ + V_{\text{CKM}}^{I\prime\prime *} \bar{d}^I \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u^I W_\mu^- \right] \\
& + \frac{e}{2 \sin 2\theta_W} \left[\bar{\psi}^I \gamma^\mu (1 - 4 \sin^2 \theta_W - \gamma_5) \psi^I - \bar{\nu}_L^I \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_L^I \right. \\
& \quad \left. - \bar{u}^I \gamma^\mu \left(1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W - \gamma_5 \right) u^I + \bar{d}^I \gamma^\mu \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W - \gamma_5 \right) d^I \right] Z_\mu \\
& - \frac{g_s}{2} (\bar{u}^I \lambda_a \gamma^\mu u^I + \bar{d}^I \lambda_a \gamma^\mu d^I) G_\mu^a
\end{aligned}$$

4. 湯川相互作用を質量固有状態で表したものの。

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_I \left(m_l \bar{\psi}^I \psi^I + m_\nu^I \bar{\psi}_\nu^I \psi_\nu^I + m_d^I \bar{d}^I d^I + m_u^I \bar{u}^I u^I \right) \left(1 + \frac{H}{v} \right)$$

- 実験と比較するには、量子化の手続きをへて散乱振幅、断面積を計算する必要がある。
- 量子論では古典的なラグランジアン密度 $\mathcal{L}_{SM}$ の他に、ゲージ固定項やFPゴースト場を含んだ Faddeev-Popov (ファデーエフ・ポポフ項) $\mathcal{L}_{FP}$ が追加になる。

非可換ゲージ理論において、理論にゲージ対称性があればそれをゲージ固定して量子化する。その結果、理論にスカラーの縦波モードに相当する余分の自由度が持ち込まれる。量子電磁気学ではこのようなモードは自由場になっていて理論から完全に分離していて問題ないが、一般にはそれを打ち消すために余分な場(非物理的な場)を導入する必要がある。Faddeev-Popovゴーストという。

量子論では、古典的なラグランジアン密度の他に、ゲージ不変性を破るゲージ固定項 $\mathcal{L}_{GF}$ と、FPゴーストを含んだファデーエフ・ポポフ項 $\mathcal{L}_{FP}$ が加わる。

ローレンツ共変性を保ってゲージ固定されたQCDのラグランジアン。

$$\mathcal{L}_{QCD}^{(tot)} = \mathcal{L}_{QCD} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$$

非可換ゲージ場の量子化には可換ゲージ場とは異なる方法が必要。ファデーエフ・ポポフ・ゴースト場が

導入される。これはグラスマン数のスカラー場で表される「非物理的な場」。この場によって非可換ゲージ場を含む散乱振幅のユニタリー性が保証される。それは観測されることはない場であり、ゲージ場の内線に関する補正にだけ現れる。

- 素粒子標準モデルに含まれる独立なパラメータ。

素粒子標準モデルにおいて独立なパラメータの数は少なくない。これらのパラメータの値は理論の内部構造からは定まらず、実験で決めるほかはない。理論ではないことを示唆している。

パラメータの総数は、ディラック・ニュートリノの場合25個、マヨラナニュートリノの場合は27個になる。

これらのパラメータの値は、理論の内部構造からは定まらない。実験で決まる。

- ヒッグス場の自己結合定数、ヒッグス場の真空期待値、単位電荷、ワインバーグ角、強い相互作用の結合定数、レプトンの質量、クォークの質量、CKM行列の混合角、PMNS行列の混合角と位相。
(粒子と反粒子の区別がつかないフェルミオンがマヨラナフェルミオン)

このことは素粒子標準モデルがまだ基本的な理論ではないことを示唆している。そしてこれらの独立なパラメータはほとんどが「質量」に関係している。

重力を量子論的に矛盾なく扱うことはできていない。質量の起源は謎が多い。

- 漸近的自由性。

電磁相互作用U(1)では、短距離で結合定数が大きくなる。これは漸近的に自由でない。

非アーベルゲージ理論では、短距離で相互作用が弱くなり、長距離で強くなる。→閉じ込め。

非アーベルゲージ理論では有効結合定数は短距離で小さくなる。漸近的自由性。

- 以上の素粒子の標準模型は多くの問題点を含んでいる。

1. 理論の枠組みその存在理由が不明。

なぜゲージ群が、SU(3)×SU(2)×U(1)なのか。

なぜ3世代の物質粒子が存在するのか。

2. 非常に多くの基本粒子やパラメータを含んでいる。

実験によりそれらの値を決めることができるが、理論的に決めることができない。

3. 重力を含んだ統一理論はまだ未完成。

様々な量子重力理論。

- 標準理論の他の簡略表現。

$$Z = \int D(\text{Fields}) \exp \left(i \int d^4x \sqrt{-g} (R - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} - W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} + \sum_i \bar{\psi}_i \not{D} \psi_i + D_\mu H^\dagger D^\mu H - V(H) - \lambda_{ij} \bar{\psi}_i H \psi_j) \right)$$

電磁気力 強い力 弱い力

物質 ヒッグスボソン

$$W = \int [Dg] [DA] [D\psi] [D\Phi] \exp \left\{ i \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{m_P^2}{2} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + i \bar{\psi}^i \gamma^\theta D_\mu \psi^i + (\bar{\psi}_L^i V_{ij} \Phi \psi_R^j + h.c) - |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi) \right] \right\}$$

電磁力、弱い力、強い力

物質

ヒッグス

$$S = \int d^4x \sqrt{-\det G_{\mu\nu}(x)} \left[\frac{1}{16\pi G_N} (R[G_{\mu\nu}(x)] - \Lambda) - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \text{tr} (F_{\mu\nu}^i(x))^2 + \sum_f \bar{\psi}^{(f)}(x) i \not{D} \psi^{(f)}(x) + \sum_{g,h} (y_{gh} \Phi(x) \bar{\psi}^{(g)}(x) \psi^{(h)}(x) + h.c) + |D_\mu \Phi(x)|^2 - V[\Phi(x)] \right]$$

重力場の作用
アインシュタイン

電弱、強い相互作用
クォーク

湯川相互作用

ヒッグス場

笠－高柳・公式は、共形場理論におけるエンタングルメントエントロピーを、そのホログラフィックデュアルの最小表面の領域に関連付ける。
この関係から、バルク時空の境界付近のバルクストレスエネルギーテンソルを計算して、境界の”量子もつれ”からバルクのローカルデータを再構築できる。

2. 重力理論の時空はミクロなエンタングルメントの集合体。
(量子エンタングルメントのホログラフィー原理による解析。)

エンタングルメント・エントロピーはどのような量子多体系においても定義できる普遍的な物理量。
系の自由度や相関を表し、系が純粋状態なのか混合状態なのかという大域的な量子相関に関する識別ができる。量子状態のトポロジーという大域的な情報も解析できる。

- ・共形場理論のエンタングルメント・エントロピーを幾何学的な面積として計算できる。
量子エンタングルメントが量子状態から幾何学的構造を抽出する。
共形場理論の量子エンタングルメントの構造から重力理論の時空が創発する、と期待される。

AdS/CFT対応にもとづくホログラフィックな計算法で、曲がった時空における極小面積という微分幾何学的な量として計算できる。

$$S_{EE} = \min_{(\partial A = \partial \gamma_A)} \frac{\text{area}(\gamma_A)}{4G_N} \quad \gamma_A : d+2 \text{次元のAdS時空内部の} d \text{次元の空間曲面} \\ \text{で、} A \text{の境界と一致するようにとる。} \\ \partial \gamma_A = \partial A$$

(ブラックホールのエントロピーを大きく一般化したもの)

A と γ_A は、トポロジカルに同じ空間(ホモロジーの立場で同じ)。ホモロジー条件。
この条件を満たす局面は無限に存在するが、そのなかの極小面積は一つ。

笠・高柳公式 : エンタングルメントエントロピー。 $S_A = \frac{A(\Gamma_A)}{4G_N}$

$A(\Gamma_A)$ は、 d 次元曲面 Γ_A の面積。
 Γ_A は、 $d+2$ 次元反ドジッター時空における d 次元曲面。
境界 $\partial \Gamma_A$ が A の境界 ∂A に一致するものの中で面積を最小にする鏡面(極小曲面)。

$d+2$ 次元の重力理論では、 $l_p = (G_N)^{1/d}$ l_p : プランク長

プランク長を用いて書き直す。 $S_A = \frac{A(\Gamma_A)}{4 l_p^d}$

エンタングルメントエントロピーはプランク長を単位とした場合、重力理論の時空の極小面積に等しい。

- ・重力理論のエントロピーの面積則が、エンタングルメント・エントロピーの面積則に直接対応する。
- ・重力理論の時空の構造を与えるのが、計量やさまざまな曲面の面積であるが、上の公式は、それが量子多体系の量子エンタングルメントの強さと等しいことを示している。
そして量子エンタングルメントの構造が、宇宙の構造に直接対応する。
- ・AdS時空における極小面積を、あたかもブラックホールの地平線のように考えて、ベケンシュタイン・ホーキングのエントロピーを計算したようなもの。
- ・ $d+2$ 次元AdS時空における重力理論は、その境界に定義された $d+1$ 次元共形場理論と同等。
- ・エンタングルメント・エントロピーは”エネルギー運動量テンソル”をより一般化した量とみなせる。
- ・共形場理論のエネルギー運動量テンソルは、重力理論の計量がAdS時空からどれ位ずれているかを境界近傍で測った量に相当している。正確にAdS時空に等しい時空の場合はエネルギー運動量テンソルはゼロになる。これは基底状態に相当する。
- ・重力のダイナミクスが量子エンタングルメントのダイナミクスとして解釈できる。
(AdS/CFT対応は”MERA”という枠組みと同等)

7-007

エントロピーとの関係。(BH、Dブレーン、エンタングルメントエントロピー、量子情報、・・・)

ブラックホール(BH)のエントロピーはBHの内部が見えないことに起因していて、BHの中に隠されている情報量を表している。量子系の一部が観測できない場合に生じるエントロピーをエンタングルメント・エントロピー(EE)と呼び、EEは量子エンタングルメントの強さを表し、量子力学における情報量を定量化する。

・BHのエントロピーとEE(エンタングルメント・エントロピー)との違い。

1. 場の理論は自由度が無限に大きいのでEEは発散してしまう。紫外カットオフを導入して有限化できる。しかしBHのエントロピーは明白に有限な量である。
2. 場の理論はどのような場(スカラー場やフェルミオン場など)に対して考えるかに依存し、またその場の個数に依存するが、BHはユニバーサルであり場の種類などに依存しない。

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3}{4G_N \hbar} \times (\text{BHの表面積}) \quad \begin{array}{l} \text{ベケンシュタイン・ホーキング公式} \\ \text{ここには統計力学、量子力学、重力理論が関係している。} \end{array}$$

・トーフトやサスキンドのホログラフィー原理。

重力理論の自由度は見かけより1次元低いと主張。”ある時空Mにおける重力理論は、その境界における ∂M (重力を含まない)場の理論と等価である”。

・超対称BHのエントロピーのマイクロな導出。 ストロミンジャーとバッフア。

Dブレーンとは非常に重く、電荷を帯びた物体のこと。

Dブレーンを多数集めるとBHになる。このようなBHはボソンとフェルミオンを入れ替える超対称性を有する。

つまり、BHの電荷と質量が等しい状況になっている。

Dブレーンはエネルギーを与えると励起されて振動する。この振動を量子化してその状態数を計算することでBHのエントロピー(上記の式)をマイクロに導出した。

しかし、Dブレーンを用いた説明は、超対称性を有するという特殊な状況にあるBHにのみ有効であり、平坦な時空のシュワルツシルト解に対してはDブレーンを用いた議論は役に立たない。

・AdS/CFT対応。 1997 マルダセナ

”反ドジッター時空の量子重力理論は、その境界上の共形場理論と等価である”。

AdS時空の重力理論とCFTが双対である。

AdS_{d+2} 時空とホログラフィックに等価な $d+1$ 次元の共形場理論はAdS時空のどこに存在するか。

AdS時空の境界にホログラフィックな理論が存在する。

z 座標が長さのスケールを表し、境界 $Z=0$ は長さがゼロ、つまりエネルギーが ∞ の状態(紫外極限)に相当し、 Z が大きくなるにつれてエネルギーが下がり、 $Z=\infty$ でゼロ(赤外極限)になる。

・共形場理論は「長さのスケールを持たない場の理論」。計量のスケール倍で不変な場の理論。

Dブレーンは何次元かの方向に広がっている板状の物体であるが、そのDブレーンをうまく選ぶと多数のDブレーンを集めて反ドジッター時空を構成できる。そしてこの時空には時間的境界が存在し、それは単に平坦なミンコフスキー時空である。

・ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー。 笠、高柳。

$$S_A = \frac{\gamma_A \cdot \text{Area}}{4G_N} \quad \begin{array}{l} \gamma_A : \text{AdS時空内部の曲面。その境界はAの境界と一致。} \\ \gamma_A \cdot \text{Area} : \text{極小面積} \end{array} \quad \partial \gamma_A = \partial A$$

直観的にこの公式は、AdS時空における極小面積をあたかもブラックホールの地平線のように思ってベケンシュタイン・ホーキングのブラックホール・エントロピーを計算したものともできる。

ホログラフィックなEEはブラックホールのエントロピーを大きく一般化したもの。

・共形場理論において観測者がAに置かれて、それ以外の領域Bの情報に観測者Aがアクセスできない状況は、AdS/CFT対応を用いると、AdS時空において γ_A に地平線をもつBHが存在し、内部を隠している状況とみなせる。

7-008

宇宙は量子エンタングルメントから創発する。 高柳、(大栗)

- 量子エンタングルメントが無数に集まることで重力理論の宇宙が生まれる。

共形場理論の量子エンタングルメントの構造から、重力理論の時空が創発する。としている。

- ゲージ重力対応は、発見から二十数年経過しているが、未だその証明は存在しない。
ゲージ重力対応は、負の宇宙定数をもつ反ドジッター時空に対してのみ適用できる。
現実の宇宙は正の宇宙定数をもつドジッター時空であり、ドジッター時空に対するホログラフィー原理が必要。
- ゲージ重力対応では、重力理論のダイナミクスが、量子多体系、特に共形場理論のダイナミクスと等価になる。
- 量子エンタングルメントからマクロな時空が創発する。

量子エンタングルメントの単位は「ベル状態(EPR状態)」である。1つのベル状態は1量子ビット分の情報量を担っている。量子多体系は無数の量子ビットの量子エンタングルメントから構成されている。これは重力理論のマクロな時空が最小単位であるプランクスケールのミニ宇宙が無数に集まって構成されることと同じ。

量子もつれが全くない場合は、それぞれのスピンは独立であり、それぞれがサイズゼロのミニ宇宙に対応する。すべてのスピンがエンタングルしている状態(量子臨界点)だと、ミニ宇宙がすべて繋がった反ドジッター時空のようなマクロな時空が創発される。

- MERAテンソルネットワーク。

量子多体系の量子状態を表す波動関数を、ネットワークの形で幾何学的に表現する。
最初にエンタングルメントを持たない1つのスピンから始めて、「アイソメリー」(粗視化)でスピンの数を増やし「ユニタリー変換」でエンタングルメントを付け加えていく。
こうやって量子臨界点の量子状態をつくる。

MERAテンソルネットワークは、ゲージ重力対応の反ドジッター時空の「時間一定面」に相当し、また「経路積分の効率化」の手法によって反ドジッター時空の時間一定面を離散化した空間が得られる。

- 量子エンタングルメントの量子補正。

重力理論が古典重力(一般相対論)で近似できる場合は、共形場理論のラージN極限(Nはゲージ理論の行列サイズ)かつ、強結合極限に相当する。
一般には量子効果によって古典近似からのズレが生じる。これは共形場理論での $1/N$ 補正に相当する。

一般に、量子補正は、 G_N が小さい時には摂動的には

$$O(G_N^0) + O(G_N) + \dots$$
 のように生じる。

古典重力近似では、笠・高柳の公式 $S_A = \frac{A(\Gamma_A)}{4G_N}$ で与えられ、これは $O(G_N^{-1})$ の項に相当する。

$O(G_N^0)$ はバルクのE・Eが寄与する。重力理論を場の理論と見た時1ループの寄与に相当する。
そのため、 $O(G_N^0)$ は、補正項という形になる。

(注記) 古典重力理論の作用Iは、アインシュタイン・ヒルベルト作用と、物質の作用の和である。

$$I_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+2}x \sqrt{-G} (R - 2\Lambda) \quad \leftarrow \dots G_N^{-1}$$

$I(\text{重力}) = I(\text{EH}) + I(\text{物質})$ 。
I(重力)の計量 $G_{\mu\nu}$ を微小変分することで、アインシュタイン方程式が導かれる。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}RG_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}$$

以上から、ゲージ重力対応において、領域 A の E・E は下記のように表せる。

$$S_A = \frac{A(\Gamma_A)}{4G_N} + S_{M_A}^{bulk} + O(G_N)$$

$S_{M_A}^{bulk}$ は、反ドジッター時空の重力理論を、自由場の理論として量子化した場合(ワンループの寄与のみを考えた場合) の E・E である。

空間 M_A は、「エンタングルメント・ウエッジ」。

反ドジッター時空の「時間一定面」において、A と極小面積 Γ_A に囲まれた領域。

- ・反ドジッター時空のように時間に依存しない背景の場合は、
共形場理論の部分領域 A は、重力理論の部分領域 M_A に対応する。
- ・エンタングルメント・ウエッジは、境界の部分系である A と B をつなぐ「ワームホール」のような構造をしていると思われる。

- ・D+2次元バルク重力の描像で、境界の領域 A に対応するエンタングルメント・ウエッジ M_A を考える。

エンタングルメント・ウエッジは境界において、領域 A のみならず、ブラックホールの内部領域をカバーしバルク内部に大きく広がる。この D+1 次元重力理論のブラックホールの内部領域が「アイランド」。

エンタングルメント・ウエッジ M_A は、ブラックホールの輻射の情報から再現できるバルク領域を表している。

※ 十分時間が経過した後では、ホーキング輻射の情報から、ブラックホールの内部を徐々に再現できるようになる。完全に蒸発した頃には内部を完全に再現できる。ということになる。

- ・アイランド公式。

相互作用する「d次元重力作用」と、「d次元共形場理論」の系におけるエンタングルメント・エントロピー。

アイランド公式を用いると、十分時間が経過すると、ホーキング輻射から、ブラックホール内に隠れていた情報を取り出すことが証明できる。 → ブラックホールの「情報喪失問題」の解決。

(量子論のユニタリティに反する情報喪失問題)

$$S_A = \text{Min}_{\text{Is}} \left[\frac{\text{Area}(\partial \text{Is})}{4G_N} + S(\text{Is} \cup A) \right] \quad \begin{array}{l} \text{Is はアイランドの領域} \\ \partial \text{Is} \text{ はその境界} \end{array}$$

第1項は、重力理論のエントロピーの寄与。

アイランドの境界を仮想的な境界と見た場合の、ブラックホールのエントロピー。

第2項は、アイランドと領域 A の和の領域に対する量子的なエンタングルメント・エントロピー。

(アイランド Is も領域 A に含まれると考えて計算しないと正しい EE は得られない)

ブラックホール蒸発の後半では、輻射の観測からブラックホール内部のアイランド Is の情報を取り出すことができる。

アイランド領域がブラックホールの内部に現れ、成長して、最終的にブラックホールを飲み込んでしまう。

エンタングルメント・ウエッジの考え方から、アイランドは重力理論のヒルベルト空間ではなく、ブラックホールの外側の領域に相当するヒルベルト空間とみなす。

7-008-01

- 量子誤り訂正符号とゲージ重力対応。

- ノークローニング定理。

量子情報のコピーをとることは不可能。

- 1量子ビットの情報を複数の量子ビットを用いて表現し、一部の量子ビットが誤差で消失しても残りの量子ビットから元の量子情報を再現することができる。

スピン1の自由度を考える。量子状態は3つの正規直交基底 $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ の線形結合。

$$|\varphi\rangle = a_1 |0\rangle + a_2 |1\rangle + a_3 |2\rangle \quad \text{で表される。}$$

これはスピン1の自由度をもつ量子系を一つとった時の量子情報に相当する。(1量子トリット)

スピン1の自由度をあと2つ用意し、合計3量子トリットを考える。それぞれを A,B,Cとする。

1量子トリットの状態 $|\varphi\rangle$ を符号化する。

$$|\tilde{\psi}\rangle = a_1 |\tilde{0}\rangle + a_2 |\tilde{1}\rangle + a_3 |\tilde{2}\rangle \quad |\tilde{0}\rangle, |\tilde{1}\rangle, |\tilde{2}\rangle \text{ の定義(省略)}$$

A,B,Cの3つの量子トリットの内、Cがノイズ誤差により消失してしまったとする。その縮約密度行列は

$$\rho_C = \text{Tr}_{AB} |\tilde{\varphi}\rangle \langle \tilde{\varphi}| = \frac{1}{3} (|0\rangle_C \langle 0| + |1\rangle_C \langle 1| + |2\rangle_C \langle 2|)$$

となり、 a_1, a_2, a_3 の依存性がなく、最大混合状態となり、情報の損失は起きない。

AとBの量子ビットにアクセスできれば、もとの状態 $|\tilde{\psi}\rangle$ を完全に再現できる。

- 量子誤り訂正符号は、量子エンタングルメントの特性をうまく利用している。

実際に使用する「物理的な量子ビット」のヒルベルト空間を「物理空間」とよび、保護したい「元の量子情報」のヒルベルト空間を「符号部分空間」とよぶ。

- 「エンタングルメント・ウエッジ」の構造は、量子誤り訂正符号の性質を有している。

ゲージ重力対応において、共形場理論から反ドジッター時空が創発する際に、量子誤り訂正符号のメカニズムが機能しているという予想が得られる。

- ゲージ重力対応によって、共形場理論から反ドジッター時空が創発する際に、量子誤り訂正のメカニズムが機能している。この時、量子誤り訂正符号の立場では、共形場理論のヒルベルト空間が「物理空間」、反ドジッター時空の(低エネルギーの)重力理論が「符号部分空間」と解釈できる。

- ゲージ重力対応では、共形場理論自体は、反ドジッター時空における量子重力理論(超弦理論が代表例)に等価となる。この量子重力理論には、「全てのエネルギースケールの物理」が入っている。低エネルギー近似をすると、一般相対論(より正確には超重力理論)が得られるが、この理論が「符号部分空間の理論」と解釈される。

広がった物体であるブレインが大きな役割をはたす。

- ・超重力理論は、一般座標変換、局所超変換に対して不変であり、ゲージ場としてスピン2の重力場と、スピン3/2のRarita-Schwinger 場を含む。

D=11 次元では、”D=11, N=1 超重力理論” があり、M理論の低エネルギー有効理論。

D=10 次元では、

D=10, N=(1,1) 超重力理論。	II A型超重力理論の低エネルギー有効理論。
D=10, N=(2,0) ; ; ; 。	II B型超重力理論の低エネルギー有効理論。
D=10, N=(1,0) ; ; ; 。	I 型超弦理論、2種類のヘテロ型弦理論の低エネルギー有効理論

- ・「M理論はII A型超弦理論の強結合極限を与える」。

M理論の低エネルギー有効作用として11次元超重力理論を与える。

含まれるゼロ質量場は、重力場、3階反对称テンソル場、グラビティーノの3つの場。

(グラビティーノは32成分をもつマヨラナスピノル)。

作用は「局所的超対称性変換」の下で不変。さらに一般の重力理論においてそうであるように、一般座標変換、および局所ローレンツ変換のもとでも不変である

M理論には長さの単位を定めるプランク長以外に何の結合定数も存在しない。

II A超弦理論は結合定数 g_s を持つが、これはM理論では円周の半径に相当する。

II A超弦理論は10次元であり、弦の結合定数を強くしていくと、円周に巻き付いた11番目の次元が出現して大きくなると考えられる。このように定義される11次元時空の量子重力理論がM理論。

- ・次元還元。

高次元の理論からトラスを使ったコンパクト化によって低次元の理論を求め、そこで高次のkaluza・Klein モードをゼロとし、ゼロモードだけの理論を作る。

例えば5次元の「スカラー場」の理論を次元還元して4次元の理論を求める場合は、場のy依存性を落として、単純に置き換えればよい。

$$\phi(x, y) \rightarrow \frac{\phi_0(x)}{\sqrt{2\pi R}}$$

5次元の「ベクトル場」を次元還元して4次元の理論を作る場合は、5次元のベクトル場は5個の成分をもっている。

$$(A_\mu, A_y) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

コンパクトな次元方向の成分 A_y は4次元の「スカラー場」を、コンパクトでない次元方向の成分 A_μ は4次元の「ベクトル場」を表す。

5次元の「重力場」を次元還元すると、4次元の重力場、ベクトル場、スカラー場が得られる。

$$\text{各々 } g_{\mu\nu}, g_{\mu y}, g_{yy}$$

次元還元では超対称性の個数は保たれる。同じ個数の超対称性を持った低次元な理論が得られる。

10次元以下の超重力理論は一般にスカラー場を含んでいるが、「11次元の超重力理論はスカラー場を含まず」複雑ではない。そのため11次元の超重力理論を次元還元して低次元の理論を構成すると見通しがよい。

- ・II A型理論の0ブレーンは、11次元超重力理論を、 S^1 にコンパクト化するときの S^1 方向に運動量をもつ状態のカルーツァ・クラインモードである(ウイッテン)とした。-----> M理論。

”D=11, N=1 超重力理論” の次元還元からII A超重力理論へ。

M理論の低エネルギー有効理論。

含まれているゼロ質量場は3つ。重力場、3階反对称テンソル場、グラビティーノ(重力子)スピノル場。

$$\text{各々、 } e_\mu^m, A_{\mu\nu\rho}, \psi_\mu$$

$$S = \frac{h}{l_p^9} \int d^{11}x e \left[R - \frac{1}{2 \cdot 4!} K_{\mu\nu\rho\sigma} K^{\mu\nu\rho\sigma} - 4(\psi_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho) + (\psi_\mu \gamma^\mu K_4 \gamma^\nu \psi_\nu) \right] \\ - \frac{h}{3! l_p^9} \int A_3 \wedge K_4 \wedge K_4 + O(\psi_\mu^4)$$

K_4 は A_3 の場の強さ。 $K_4 = dA_3$

ここでフェルミオン部分(重力子-グラビティーノ ψ)を除き「ボソン部分のみ残し」、表記号を少し替える。

$$S_{11-SG} = \frac{1}{2} \int d^{11}x \sqrt{-G^{(11)}} \left(R^{(11)} - \frac{1}{48} |dA_3|^2 \right) + \frac{1}{6} \int dA_3 \wedge dA_3 \wedge A_3$$

11番目の方向が半径 r の円 S^1 にコンパクト化された場合、
11次元の計量は10次元の計量とベクトル場、スカラー場に分解する。(各々、 G_{MN} , C_M , γ)
 C_M , γ は各々11次元計量の $G_{M11}^{(11)}$, $G_{1111}^{(11)}$ 成分)

$$ds^2 = G_{MN}^{(10)} dx^M dx^N + e^{2\gamma} (dx^{11} - C_M dx^M)^2 \quad r = e^\gamma, \quad M, N = 0, 1, 2 \cdots 9,$$

10次元への次元還元の下で、 $A_{3\mu\nu\rho} \rightarrow C_{3MNP} = A_{3MNP}$, $B_{MN} = A_{3MN11}$ と分解される。

$$S = \int d^{10}x \sqrt{-G^{(10)}} \left(e^\gamma \left(R - \frac{1}{48} |dC_3|^2 \right) - \frac{e^{3\gamma}}{4} |dC_1|^2 - \frac{1}{12} e^{-\gamma} |dB_2|^2 \right) \\ + \frac{1}{2} \int dC_3 \wedge dC_3 \wedge B_2$$

これにワイル変換 $G_{\mu\nu}^{(10)} = e^{-\gamma} g_{\mu\nu}$ (string frame $\rightarrow$ Einstein frame) を行くと、

$$S = \int d^{10}x \sqrt{-g} \left(e^{-3\gamma} \left(R + 9 |\nabla_\gamma|^2 - \frac{1}{12} |dB_2|^2 \right) - \frac{1}{4} |dC_1|^2 - \frac{1}{48} |dC_3|^2 \right) \\ + \int dC_3 \wedge dC_3 \wedge B_2$$

これはIIA超重力理論の作用と同じ。

スカラー場 γ と、ディラトン ϕ との関係。 $e^{-3\gamma} = e^{-2\phi}$ ($3\gamma = 2\phi$)

String frame では超重力理論の作用は、 $\int d^{10}x \exp(-2\phi) \sqrt{g} R + \cdots$
 ϕ はディラトンで $\exp(2\phi)$ は弦理論のニュートン定数(重力の相互作用定数)に相当する。

11次元の半径 r と、IIA弦理論の結合定数 g_s との関係。

$$r = e^\gamma = e^{\frac{2\phi}{3}} = g_s^{\frac{2}{3}} = g_s^{\frac{2}{3}} l_p \quad (\text{式-1}) \quad l_p : 11\text{次元理論のプランク長}$$

11次元のニュートン定数は $1/l_p^9$ 、10次元のそれは $1/(g_s^2 l_s^8)$ に比例する。

l_s は、弦の張力の逆数 α' との関係。 $l_s^2 = \alpha'$

次元還元の際、 S^1 の半径 r だけニュートン定数が変化するため、以下の関係がある。

$$\frac{r}{l_p^9} = \frac{1}{g_s^2 l_s^8} \quad (\text{式-2}) \quad \text{式-1, 2 から、} \quad r = g_s l_s, \quad l_p = g_s^{1/3} l_s \quad (\text{式-3})$$

11次元は S^1 にコンパクト化されたため11方向の粒子の運動量は n/r (n は整数)に量子化されている。

したがって r が大きい時、11次元の理論には小さな質量 $m = |n|/r$ の状態が無数に現れる。

この粒子の質量は10次元では $m = \frac{|n|}{r} = \frac{|n|}{g_s l_s}$ となりR-R電荷をもった0ブレーンに見える。
(式-4)。

R-R電荷をもったソリトンの p ブレーン解は、IIA、IIB型理論に存在する。IIA型では p =偶数、IIB型では p =奇数。

IIA型での0ブレーンはR-R電荷をもった臨界ブラックホールでその質量は、 $m = e^{-\phi} |n| = \frac{|n|}{g_s}$
 n はR-R電荷。
(式-5)

次元酸化。Dimensional oxidation。

式-4、式-5の比較からウイッテンは、

IIA型理論の0ブレーンは、11次元超重力理論を、 S^1 にコンパクト化するときの S^1 方向に運動量をもつ状態のカルーツァ・クラインモードであるとした。

3. この理論から素粒子の標準模型を低エネルギーの有効理論として再現する必要がある。
4. 標準模型はカイラルフェルミオンを含む。つまり電弱ゲージボソンが左巻きのカイラル・フェルミオンとのみ結合している。そのため、このII B行列模型から4次元のカイラル・フェルミオンを実現させる必要がある。

結局、余剰次元空間が非自明なインデックスをダイナミカルにもつことを示す必要がある。

5. II B行列模型から何らかのメカニズムでダイナミカルに4次元にコンパクト化され、そのコンパクト化された理論がカイラルな理論になっている必要がある。
6. II B行列模型が、弦の摂動論を完全に再現することを定量的に示す必要がある。
 - 1). 散乱振幅を計算し弦理論と一致させる。
 - 2). 行列模型のループ方程式から弦の場の理論を導出する。
- II B行列模型が、II B超弦理論のシルト作用を行列正則化したものに対応している。

南部・後藤型のグリーン・シュワルツ作用を、ポアソン括弧を導入してシルト型に書き換える。

$$\begin{aligned} \text{ポアソン括弧。} \quad \{X, Y\} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ab} \partial_a X \partial_b Y \\ S_{Schlld} &= \int d^2\sigma \left[\sqrt{g} \alpha \left(\frac{1}{4} \{X^\mu, X^\nu\}^2 - \frac{i}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu \{X_\mu, \psi\} \right) + \beta \sqrt{g} \right] \\ \text{この作用から得られる } \sqrt{g} \quad &\text{についての下記の運動方程式から、} \sqrt{g} \quad \text{を求める。} \\ &-\frac{1}{4} \alpha \frac{1}{(\sqrt{g})^2} (\epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2 + \beta = 0 \\ \sqrt{g} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \sqrt{(\epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2} \end{aligned}$$

求めた $\sqrt{g}$ をシルト型作用に代入する。

$$S = \int d^2\sigma \left(\sqrt{\alpha\beta} \sqrt{(\epsilon_{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)^2} - \frac{i}{2} \alpha \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \bar{\psi} \Gamma^\nu \partial_b \psi \right)$$

これは南部・後藤型のグリーン・シュワルツ作用をゲージ固定した作用に似ている。

$$S_{Schild} \text{ を古典作用とする経路積分は } Z = \int D\sqrt{g} DX D\psi e^{S_{Schild}}$$

S_{Schild} は世界面上の一般座標変換不変性をもつ。経路積分もこの対称性をもつと仮定する。
 $\sqrt{g}$ を固定することにより、この対称性をゲージ固定する。

$$\text{一般座標変換のパラメータ } \epsilon^\alpha \quad \text{に次の制限がつく。} \quad \partial_a (\epsilon^a \sqrt{g}) = 0$$

なお、経路積分において $\sqrt{g}$ についての汎用関数積分は、
 としたとき A についての積分になる。

$$A = \int d^2\sigma \sqrt{g}$$

ゲージ固定の後、経路積分を正則化する。

ポアソン括弧は $N \times N$ 行列の交換子に代わり、世界面上の面積分は $N \times N$ 行列のトレースに代わる。

$$\text{正則化} \quad : \quad \{, \} \rightarrow -i[,] \quad \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \rightarrow Tr$$

世界面上の場 X^μ, ψ, ρ は、 $N \times N$ のエルミート行列になる。

ポアソン括弧の基本的性質は、トレースの性質に引き継がれる。

$$\begin{aligned} \int d^2\sigma \sqrt{g} \{X, Y\} &= 0, & Tr([X, Y]) &= 0, \\ \int d^2\sigma \sqrt{g} X \{Y, Z\} &= \int d^2\sigma \sqrt{g} Z \{X, Y\} & \rightarrow \rightarrow & Tr(X[Y, Z]) = Tr(Z[X, Y]) \end{aligned}$$

- ・正則化を S_{Schild} に適用すると、以下の作用になる。世界面上の場 X_μ に対応する $N \times N$ エルミート行列を A_μ と書いている。

$$(1) \quad S = \alpha Tr \left(-\frac{1}{4} [A_\mu, A_\nu]^2 - \frac{1}{2} \bar{\psi} \Gamma^\mu [A_\mu, \psi] \right) + 2\pi\beta Tr 1$$

$$(2) \text{ 経路積分} \quad Z = \sum_0^\infty \int dA d\psi e^{-S}$$

上記の作用と経路積分は ΠB 行列模型の有効理論と考えられ、

(1) で $\beta \rightarrow \beta_c$ とすることにより、(2) の $N \rightarrow \infty$ の極限と等価になると期待される。

- ・シルト型作用の経路積分は行列模型によって正則化されたことになるが、シルト型作用は1体の弦の作用であり弦の第一量子化を行っていることになる。

- ・ ΠB 行列模型は弦の多体系を記述している。 $N \rightarrow \infty$ の極限では無限多体系のダイナミクス(非摂動効果)を自然に記述している。弦の第二量子化された理論になっている。

他—————

- ・弦理論のコンパクト化としてカラビ・ヤウ多様体を考えるが、それは超対称性が保たれるからである。コンパクト化では質量がゼロのスカラー場が生じる(モジュライ場)。

- ・弦理論においては、「弦の世界面」と「背景時空」の2つの時空が存在する。どちらを時空と解釈するかによって2つの方法がある。

「GS形式」——背景時空に対して直接超対称性を導入する方法。

「RNS形式」——弦の作用が背景時空ではなく世界面上での超対称性をもつ。

GS形式——ローレンツ共変な量子化が困難。

RNS形式——世界面上で超共形対称性が存在し共形場理論の手法が利用できる。

背景時空上の超対称性は明白ではないが、GSO射影という操作でGSと同じく背景時空上の超対称性をもつ理論が得られる。ローレンツ共変な量子化が容易。

開弦の物理的状態。

NSセクターはボソン、Rセクターはフェルミオンを表す。

閉弦の物理状態。

NS-NSセクター、R-Rセクターはボソン。

NS-Rセクター、R-NSセクターはフェルミオン。

超対称性は、NSセクターとRセクターの状態の入れ替えに対する対称性。

RNS形式では超対称性の存在は明白ではない。

GS形式ではNSセクターとRセクターの区別はなく、超対称性は明白。

- ・最近のトピック。 大栗——「量子重力には対称性はない」

重力と量子力学を統一する理論では、対称性がすべて破れてしまうことを、ホログラフィー原理を用いて証明した、としている。AdS/CFT 対応と「量子誤り訂正符号」との間に近年発見された関係性を用いるという新たな手法を用いた。

量子力学と重力が統一されている最も基本的なレベルの自然の法則では、対称性が保たれないことを明らかにした。物理学者達が抱いてきた対称性に対する信念が間違っていることを示した。 とある。

7-016

天文学、宇宙論、超弦理論の年表。

- 1916 一般相対論。(アインシュタイン)
- 1922 膨張宇宙の一般解の発見。(フリードマン)
- 1929 宇宙膨張の発見。(ハッブル)
- 1937 重力定数Gが時間変化するというアイデア。(ディラック)
- 1948 ビッグバン宇宙モデルと元素合成理論。(ガモフ)
- 1949 修正重力理論。スカラー場による重力定数の空間および時間変化。(ジョルダン)
- 1961 スカラー=テンソル=重力理論。(修正重力理論)(ジョルダン=ブランズ=ディッケ)
- 1965 宇宙マイクロ波背景輻射の発見。(ペンジアス・ウイルソン)
- 1980 最初のインフレーションモデル。(スタロビンスキー)
- インフレーション宇宙モデル。(佐藤、グース)
- CfA銀河サーベイによる宇宙の大規模構造の発見。
- 1983 MOND。修正ニュートン力学。(ミルグラム)
- 1984 アノマリー相殺メカニズムの発見。 グリーン、シュワルツ。
- 1985 宇宙のダークマターの存在が認められる？
- 1980年代後半。
 - カラビ・ヤウ(CY)空間コンパクト化。10次元=4次元+6次元CY空間(内部空間)
 - ミラー対称性の発見――>ホモロジカル・ミラー予想。
 - 5種類の摂動論的弦理論の完成。
 - ヴァイレッキン。 無からのトンネル効果による宇宙の出現理論。
 - ホイラー・ドウィット方程式。重力場の正準量子化。
 - ハートルとホーキング。ハートル・ホーキング波動関数。無境界条件仮説。
- 1982~1989. 位相的場の理論。
 - トポロジカル・ツイスト。
 - 超対称場の理論――>位相的場の理論。
 - 物理量が位相不変量になり、距離依存性なくなる。
 - ウイッテンのモース理論： 分配関数=オイラー数
 - ドナルドソン不変量――>4次元図形の分類
 - 位相的弦理論の計算方法。 チェコッティ・大栗・バッフア。
 - BPS状態(エネルギー極小状態)だけを拾う理論。
- 1992 宇宙マイクロ波背景輻射の温度ゆらぎの発見。(COBE衛星)
- 1993 銀河系内MACHOの検出。
- 1994. 双対性の発展。
 - ザイバーク・ウイッテン理論。
- 1995. M理論、ウイッテン
 - Dブレーン(弦理論のソリトン)。 ポルチンスキー。
 - N枚重なったDpブレーン ――> (p+1)次元のU(N)ゲージ理論。
 - Dブレーンを使ったブラックホール・エントロピーの統計力学的理解。
 - Dブレーンを大量に重ねるとブラックホールになる。
 - 開弦の自由度の数え上げ――>エントロピーの導出。
 - スピンネットワーク基底の定式化。 スモーリン、ロベツリ。
- 1997. AdS/CFT対応。 マルダセナ、
 - 量子重力に対する”スピン泡”のアプローチ。ライゼンバーガー、ロヴェッリ。
- 1998 宇宙の加速膨張の発見
- 1999. 非可換空間上のゲージ理論。 ザイバーク・ウイッテン。
 - 10%精度でのハッブル定数の決定。
 - 遠方超新星の観測による宇宙定数(暗黒エネルギー)の観測的証拠。
- 2000. ループ量子宇宙論の定式化。 ボジョワルド。
- 2002. ネクラソフ予想。
- 2003 WMAP衛星による宇宙マイクロ波背景輻射の温度地図の精密測定。
 - SDSSによる銀河・クエーサーカタログ初期成果の発表。
- 2004. BHエントロピーの公式。 大栗・ストロミンジャー・バッフア予想。
 - TeV S テンソル=ベクトル=スカラー重力理論。(ベケンシュタイン)
 - STVG スカラー=テンソル=ベクトル重力理論。(モファット)
- 2006. エンタングルメント・エントロピーの計算。 笠-高柳
- 2008. コンチェヴィッチ・ソイベルマン壁超え公式。
- 2009. エンタングルメント・エントロピーを用いた量子重力の解釈。
 - エンタングルメント繰り込み(MERA)を用いたAdS/CFTの再解釈。
- 2012年 ヒッグスボゾンの発見

第 8 章 宇宙論と量子重力

	ページ
8-001 宇宙の熱史	241
8-001-01 宇宙論的相転移。	242
8-002 宇宙進化。	244
8-003 宇宙の始まりと相転移	247
8-004 GUT大統一理論	248
8-005 量子重力理論と統一理論と対称性。	250
8-006 インフレーションに関するメモ。	252
8-007 空間の創発と解釈。	257
8-008 ダークマター	
8-008-01 標準理論。	258
8-008-02 修正重力理論	262
8-008-03 モファットのMOG	263
8-008-04 MOG宇宙論	267
8-009 ダークエネルギー	268
8-010 一様等方宇宙でのフリードマン方程式。	271
8-011 初期の量子重力理論。	273
8-012 量子宇宙論。	275
8-012-01 ループ量子重力理論。(LQG)	276
8-012-02 ループ量子重力理論への展開	278
8-012-03 ループ量子宇宙論。(LQC)	281
8-012-04 Dブレーン宇宙論	282
8-012-05 各種の量子宇宙論モデル	284
8-013 標準理論の不完全性	288
8-014 物理法則の進化論的解釈	291
8-015 宇宙論パラメータ	292

新しいインフレーション理論。

真の真空への二次相転移によって宇宙の加速膨張を起こす。(リンデ、アルブレヒト、スタインハート)

初期の高温状態のために原点付近に留まっていたヒッグス場が、温度の低下とともにゆっくりと動き、真の真空状態へ向かう。(インフレーションは相転移が始まってから起きる)

ポテンシャルエネルギーの勾配が大きくなると加速膨張が終わる。

しかしこの模型では、スカラー場が偽真空で長い時間留まるという初期条件の微調整問題がある。

カオティックインフレーション模型。(リンデ)

プランク時期には、大きな量子ゆらぎが存在し、スカラー場の値は各領域で異なり、プランク質量を超える領域もあったと考える。このような領域では場がポテンシャルに沿ってゆっくりと運動すると加速膨張を起こす。

$$V(\phi) = \frac{m^2 \phi^2}{2} \quad \text{の時、}$$

$$\phi \geq 0.3 m_{pl} \quad \text{で加速膨張が起きる。}$$

$$\phi \leq 0.3 m_{pl} \quad \text{場の動きが速くなり場が } \phi=0 \text{ の周りで振動する。}$$

宇宙は再加熱期に移行する。

再加熱期に場のエネルギーが輻射エネルギーに転換され、熱い火の玉になりビッグバンに移行する。

ϕ の変化率 > 宇宙膨張率、になるため、 ϕ は原点の周りを激しく振動する。

この振動は宇宙膨張で振幅を減じながら崩壊して宇宙を加熱する。→再加熱

- ・インフレーションは急速に宇宙を一様化するので、背景時空としてはロバートソン・ウォーカー計量 (RW) を使い、そのもとで行えばよい。

インフレーションを起こすスカラー場(インフラトン)を ϕ とすると、作用は

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right)$$

この作用の変分により、 $\phi(x)$ の運動方程式が得られる。 $\frac{d^2 \phi}{dt^2} + 3H \frac{d\phi}{dt} + \frac{dV}{d\phi} = 0$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'[\phi] = 0$$

H はエネルギー密度 $\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)$ を用いて、 $H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_\phi$

インフレーションが起きるには、ポテンシャルエネルギー密度 $V(\phi)$ が ρ_ϕ を支配する時間が十分長いこと。そのためには ϕ はポテンシャルの坂をゆっくりと転がる必要がある。

よって、 $\ddot{\phi} = 0$ を無視できる状況が要請される。 $V[\phi] = \rho_\phi$

スローロール近似した方程式は、

$$3H\dot{\phi} + V'[\phi] = 0, \quad \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H^2 = \frac{V[\phi]}{3m_G^2}$$

- ・インフレーションが起きるには、転がる場の「進化タイムスケール」が宇宙膨張のタイムスケールよりも十分長いことが必要。

$$\text{スローロール・パラメータ。} \quad \varepsilon \equiv \frac{m_G^2}{2} \left(\frac{V'[\phi]}{V[\phi]} \right)^2 \leq 1 \quad \eta \equiv m_G^2 \frac{V''[\phi]}{V[\phi]} \leq 1$$

プライムはスカラー場 ϕ に対する微分。

$\varepsilon \leq 1, \eta \leq 1$ の条件が成り立っていると、ポテンシャルエネルギー密度 $V(\phi)$ は、ほぼ一定に保たれスカラー場がゆっくり転がり、指数関数的な宇宙膨張が実現する。 $a \sim e^{Ht}$

スカラー場の発展により、スローロール条件が満たされなくなると、インフレーションは終了し、インフラトンは極小点で振動するようになる。この時インフラトンと結合している場の粒子生成が起こり、インフラトンはエネルギーを放射に散逸する。これが宇宙の「再加熱」であり、この後の標準ビッグバン宇宙モデルへ遷移していく。

- 宇宙定数、ダークエネルギー (DE)。

どこで測定しようと、いつ測定しようと、観測者がどう動いていようと、同じ普遍的な値が得られる。
ダークエネルギーが宇宙定数かどうかは明確ではない。

ストリング理論はDEを予想しなかった。当時のストリング理論では宇宙定数は、ゼロか負にしかなりえない。
マルダセナ予想は、「負の宇宙定数」をもつ時空を含んでいた。
しかし、観測により宇宙は加速度的に膨張しているので「正」でなければならない。

――> ポルチンスキー & ブッソ

- 宇宙定数は万有引力で物が縮むのを押し返す。
時空の曲がり具合 = 物質のもつエネルギー

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{C^4}T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{C^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

- 地平線問題、平坦性問題をインフレーション・モデルが解決する。
宇宙が膨張できる初速度を与えたのはインフレーション。インフレーションを起こす場はヒッグス場とは限らない。
- インフレーションが十分長く続くには、ポテンシャルエネルギーの時間変化が小さい必要がある。
(スローロール条件)
インフレーションをスムーズに終わらせることを考えると、インフレーション中も「スカラー場の値」が緩慢に変化するモデルの方が良い。
- スカラー場 ϕ の出自。

1. ゲージ場やクォークとレプトンに質量を与えるヒッグス場。
ヒッグス場の一次相転移を利用 -----> 佐藤、グース
曲率の2次項を含む重力理論において指数関数的膨張。 -----> スタロビンスキー
2. 超対称性理論のフェルミオンのスーパーパートナーのスカラー場。
3. スカラーテンソル理論、高次元理論、高階微分理論、等の一般化された重力理論から「スカラーモード」として取り出されるスカラー場。
現在ではスカラー場 ϕ のポテンシャルエネルギー $V(\phi)$ が宇宙のエネルギー密度を担う、と考えられている。

- スローロール近似した方程式。
スローロールだと膨張時間内では ϕ は殆ど変化しないので、ポテンシャルエネルギー密度もほぼ一定に保たれる。
それにより準指数関数的な宇宙膨張が実現する。

- フリードマン宇宙膨張では、
曲率 : 正。 宇宙は収縮に向かう。
負。 永遠に膨張を続ける。
ゼロ

物質の臨界密度を Ω として、物質密度で表すと、 (物質密度 $> \Omega$) = ($\Omega > 1$)

$\Omega > 1$: 曲率が正の宇宙に対応。
 $\Omega = 1$: 曲率がゼロ。
 $\Omega < 1$: 曲率は負の宇宙。

体積が100倍になると、その中の真空エネルギーも百倍になる。宇宙の大きさが100桁になると体積は300桁。
真空のエネルギーがすべて熱エネルギーに変わってしまうので、エネルギーは300桁に増加する。

- 膨張。
インフレーション : 指数関数的膨張。
ビッグバン : 級数的膨張。
- インフレーション理論はまだ基本的な物理的根拠がない。
インフレーションモデルは、「場の量子論」から多くの発想を得ているが、モデルに用いられる「場」は、自然界にある場と直接結びついていない。基礎的な理論がないのでインフレーションがそもそもどのように原始の宇宙で起こったのかは自由に憶測できる。

・リンデ 1983

カオティック・インフレーション。

プランク時間には大きな量子ゆらぎが存在するため、スカラー場 ϕ の値は、宇宙の各領域で異なり、 ϕ がプランク質量を超えるような領域があると考えた。このような領域で場がポテンシャルに沿って「ゆっくりと運動する(スローロール)と宇宙は加速度膨張を起こす」というもの。

例えば $V(\phi) = m^2 \phi^2 / 2$ の場のポテンシャルでは、 $\phi \geq 0.3 m_{pl}$ でインフレーションが起き $\phi \leq 0.3 m_{pl}$ では、場の動きが速くなり、場が $\phi = 0$ の周りで振動するようになると、宇宙は再加熱に移行する。

再加熱期に場の「エネルギーが輻射のエネルギーに転換され」宇宙は熱い火の玉となり、ビッグバンにつながる。現在は超弦理論や超重力理論を用いてインフレーションモデルを構築する研究が盛ん。

・k-インフレーション

場の運動エネルギーの非線形項によって加速度膨張を引き起こす。

・ナチュラルインフレーション

擬スカラー型の南部・ゴールドストーンに基づく。

・ハイブリッドインフレーション

2つのスカラー場を用いたもの。1994 リンデ

・ダブルインフレーション

2つの場による宇宙に加速度膨張。

以上のモデルはCMBの観測値との比較から選別される。

・インフレーションの最も簡単なモデルは、単一なスカラー場による一時的な「真空エネルギー」で宇宙を加速膨張させるもの。

条件として、一つ目は、膨張指数が最小の膨張指数より大 ($N > N_{min}$)。

二つ目はインフレーションが終了すること。インフレーションの機構は、この条件を満たす

スカラー場を求めればよい。

・インフラトンというスカラー場 ϕ とそのポテンシャル $V(\phi)$ が大きく、非常に平坦であることが必要。

このスカラー場は、最初ポテンシャルを非常にゆっくりと転がる(スローロール)ため、ハッブル定数 H は非常にゆっくり減少し、場があまり変化しない間に指数関数的に膨張する。

最も簡単な場合は、実スカラー場 $\phi(x)$ がインフラトン場になる場合である。運動方程式が時間の2階微分までしか含まず、さらに作用積分がローレンツ不変性と一般座標変換不変性を満たすこと。

それには下記のラグランジアンしか許されない。

実スカラー場 $\phi(x)$ で自由場に対するラグランジアン密度は、 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi^2)$
これを一般化した形、 $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)$

スカラー場のエネルギー密度と圧力は各々、

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

・フリードマン方程式。

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{K}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad \longrightarrow \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] - \frac{K}{a^2}$$

$$\dot{H} = -4\pi G (\rho + P) + \frac{K}{a^2} \quad \longrightarrow \quad \dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}^2 + \frac{K}{a^2} \quad K: \text{空間曲率}$$

十分初期の宇宙では宇宙定数 Λ は寄与しないとするので、 $\Lambda = 0$ 。

・スカラー場のエネルギーだけを持った平坦なロバートソン・ウォーカー時空での場の方程式は、エネルギー保存則

$$0 = T^{\mu}_{\mu} = \frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^0_{\mu\nu} T^{\nu\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\nu} T^{0\mu} = \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \Gamma^0_{ij} T^{ij} + \Gamma^i_{i0} T^{00}$$

$$= \frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a} (\rho + P)$$

これから $\dot{\rho} = -3H(\rho + P)$

上式の ρ, P から場の方程式が得られる。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0$$

これは速度に比例する摩擦を受けながら1次元運動をする質点の運動方程式と同じ。
 左辺第1項が加速度項、第2項が摩擦項、摩擦力に対応する係数がハッブルパラメータHとなる。
 第3項は曲率項。
 宇宙の膨張はスカラー場の値の変化を妨げようとする。ポテンシャルの傾き $dV/d\phi$ が十分に小さければ、
 宇宙が急激に膨張し続ける間、スカラー場の値がゆっくり変化することができる。

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{\rho_\phi}{3M_G^2}, \quad \rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (M_G = \sqrt{\frac{hc^5}{8\pi G}} = 2.4 \times 10^{18} \text{ GeV})$$

・スローロール近似した方程式。

ポテンシャルエネルギー $V(\phi)$ がエネルギー密度 ρ を支配する期間が十分長く続けば、
 インフレーションが起きる。それには ϕ はポテンシャルの坂をゆっくり転がる必要がある。
 つまり上記式の $\ddot{\phi}$ が無視できるほど小さい必要がある。

$$3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{V(\phi)}{3M_G^2}$$

ポテンシャルが緩やかで、転がるタイムスケールが宇宙膨張のタイムスケールより十分長い必要がある。

スカラー場の時間変化が十分ゆっくりして $\dot{\phi}^2 \leq |V(\phi)|$ を満たすなら、 $\rho_\phi = -P_\phi = V(\phi)$
 となり、スカラー場のポテンシャルが宇宙定数 Λ の役割を果たす。
 $\Lambda \leftrightarrow 8\pi G V(\phi)$

ポテンシャルエネルギーが正 $V(\phi) > 0$ で、宇宙のエネルギーの優勢成分になるとき、
 正の宇宙項の優勢期と同様のド・ジッター宇宙が現れ、加速膨張するインフレーション期が実現する。

・インフレーションによってスケール因子が急激に大きくなると、曲率項 K/a^2 は急激に小さくなる。

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3} V, \quad \dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{\dot{H}}{H^2} \simeq -\frac{3\dot{\phi}^2}{2V} \leq 1$$

ハッブルパラメータの時間変化は非常に小さくなる。

・スローロール・インフレーション。

「スカラー場の値がゆっくり変化する」ことでインフレーションを起こすモデル。
 スカラー場が一つの場合は、単一場スローロール・インフレーション。

・スローロール条件。

宇宙の膨張はスカラー場の値の変化を妨げようとする。ポテンシャルの傾き $dV/d\phi$ が十分に小さければ、宇宙が急激に膨張し続ける間、スカラー場の値が十分にゆっくりと変化することができる。

上記の運動方程式において、加速度項が摩擦項より小さく、スカラー場のポテンシャルと摩擦力が釣り合うように運動するので、近似的に

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{1}{3H} \frac{dV}{d\phi}$$

この近似が成り立つようなインフレーションを起こすためには2つの条件を満たせばいい。

$$\ddot{\phi}^2 \leq 2V(\phi), \quad \left|\ddot{\phi}\right| \leq 3H \left|\dot{\phi}\right|$$

最初の条件は、スカラー場が加速膨張を起こすために必要(宇宙項と同じ役割)。2番目の条件は、
 十分なインフレーション期を確保するためにスカラー場の運動をゆっくりさせるために必要。

宇宙の指数関数的膨張はこの条件が満たされれば続くことになる。

また、上の条件式の1番目を満たすポテンシャルの条件は

$$\left|\frac{V'(\phi)}{V(\phi)}\right| \leq \sqrt{16\pi G} \quad \left|\frac{V'(\phi)}{V(\phi)}\right| \leq \sqrt{24\pi G} \quad \longrightarrow \quad \left|\frac{V''(\phi)}{V(\phi)}\right| \leq 24\pi G$$

この2式が平坦性条件。

- ・インフレーション模型の選別で、最も重要な観測値は N_s と r である。

1. 曲率揺らぎのスペクトル指数 N_s
2. テンソル・スカラー比 r

スローロールインフレーションの場合、スローロールパラメータ ϵ のみで与えられ $N_s = -2\epsilon$ $r = 16\epsilon$ を満たす。単一のスカラー場によるスローロール・インフレーションではスローロールの最低次で $N_s = -r/8$ を満たす。→無矛盾性関係。

- ・e-foldings数。膨張指数。

インフレーション中の時刻 t から終わりの時刻 t_{end} までの加速膨張の程度を表す量。

$$N(t) \equiv \ln \frac{a(t_{\text{end}})}{a(t)} = \int_t^{t_{\text{end}}} H dt \quad H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{ハッブルパラメータ}$$

インフレーション期の時刻 t 以降、インフレーションの終了までの間に、宇宙の相対的な大きさは $e^{N(t)}$ 倍に膨張する。ある時刻以降インフレーション期がどれくらい持続したかを表す量。

インフレーション終了時の温度が、大統一理論のエネルギースケール 10^{15} GeV 程度であるとし、その時の有効自由度が素粒子標準モデルの素粒子の種類数と同程度 ~ 100 とすると、インフレーションの膨張指数が $N \geq 60$ を満たすとき、ホライズン問題が解決される。

物理的スケールがハッブル半径を横切るときの波数を $k=aH$ とする。

波数 k のモードがインフレーション中に1回目のハッブル半径との交差を起こしたとき、これは共動ハッブル半径と共動波長 (H^{-1}/a , k^{-1}) の交差と同じ。

共動ハッブル半径はインフレーション中に減少するが再加熱期、輻射優勢期、物質優勢期に増加する。

$N(k)$ が 55~65 程度が CMB で観測される温度ゆらぎのスケールに対応する。

地平線問題を解決する目安としては $N(k) \geq 70$ である。

- ・曲率揺らぎ。

インフレーション初期のハッブル半径より小さな波長 ($k \gg aH$) の量子揺らぎを「種」としている。

その後、揺らぎの物理的波長がハッブル半径と同程度になるころから重力的效果が効きはじめ、古典的揺らぎとしてふるまう。 $K \ll aH$ で曲率揺らぎは凍結する。

- ・加速膨張で温度が急激に減少するため、その後に宇宙が熱くなるための「再加熱」の時期が必要になる。
再加熱期は輻射優勢期への移行期であり、それが質量をもったスカラー場によって起こればその時期は一時的な物質優勢期となる。
インフレーション期 → 再加熱期 → 輻射優勢期 → 物質優勢期 → 後期加速膨張期。

- ・物理的スケールとハッブル半径。

インフレーションの始まりにハッブル半径内にあった物理的スケールは因果律をもっている。

加速膨張でそれが急に大きくなるとハッブル半径を超えて因果律を持つようになる。

インフレーションが終わり減速膨張期に入るとハッブル半径の増加のほうで物理的スケールの増加より早くなり、ハッブル半径の内側に入ってくる。2回目のハッブル半径との交差が起きる。

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad \text{ハッブルパラメータ(宇宙の膨張率)} \\ a \text{ はスケール因子}$$

- ・再加熱。

インフレーションが終わると再加熱期に入り、インフラトン場 ϕ が他の粒子に崩壊する。

インフレーション中は急激に温度が減少するが再加熱期に輻射の生成により温度が再び上昇する。

インフレーションが持続した後、スカラー場が物質と相互作用してそのエネルギーを物質と放射のエネルギーに転換させれば、高温かつ高密度のビッグバン初期状態が現れる。

再加熱はスカラー場のポテンシャルエネルギーが物質と放射のエネルギーに転換する過程である。

再加熱期にグラビティーノなどが過剰生成されるとその後の宇宙進化に問題を引き起こす。

それを避ける条件として $T \leq 10^9 \text{ GeV}$ という制限がある。 10^{22} K に相当する。

インフラトン場 ϕ が、フェルミ粒子 ψ とボーズ粒子 χ に崩壊する(ボルン崩壊)とし、

その相互作用のラグランジアンは、 $\mathcal{L}_{\text{int}} = -f\phi\bar{\psi}\psi - \sigma\phi\chi^2 - g^2\phi^2\chi^2/2$

f, g は無次元の結合定数、 σ は質量の次元をもつ結合定数。最後の項は4点相互作用項。

8-008-02

修正重力理論。

一般相対性理論を修正した理論としては、4つのカテゴリーに分かれる。

1. スカラー・テンソル理論。(計量テンソル場以外に、スカラー場を力学的自由度として含む)
2. ベクトル・テンソル理論。(ベクトル場を含む)
3. 有質量重力理論、F(R) 重力理論。(計量テンソル場の構造を変更した理論)
4. テンソル・ベクトル・スカラー理論。(混合型)

・スカラー・テンソル理論。

一般相対性理論を含む拡張された重力理論。

計量テンソル場以外に、スカラー場を力学的自由度として含む。

計量とスカラー場の方程式が2階の微分方程式からなる一般的なものは、ホルンデスキー理論。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi} \left(\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) \right) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi),$$

 ϕ : ブランス・ディッケスカラー場、 $\omega(\phi)$: スカラーと物質の相互作用の強さの結合関数。 $U(\phi)$: スカラー場のポテンシャル。 Ψ : 物質場、 S_M は物質の作用。計量 $g_{\mu\nu}$ の再定義(共形変換)を行うことにより、スカラー場 ϕ と曲率 R の結合を切り離すことで、「アインシュタイン系」に移る。(スカラー曲率 R とスカラー場 ϕ の直接の結合のため、物質は ϕ と間接的に結合している)

・ゼロ質量スカラー場 ($U=0$) の時、 $\omega \rightarrow \infty$, and $\omega^{-3} \frac{d\omega}{d\phi} \rightarrow 0$, の極限で、一般相対性理論に移行する。

・このような形の作用積分は、弦理論の低エネルギー極限でも現れる。
「弦理論はそういう意味で一般相対性理論を内在している」。

・作用積分がスカラー曲率 R の関数形で表される F(R) 理論も $\omega = 0$ のスカラー・テンソル理論と等価。

・一般相対性理論は、「一般共変性」と「等価原理」の2つの指導原理から構成される。

重力場のラグランジアン密度は $\frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} R$ と書き、ミンコフスキー時空の計量テンソルを、 $g_{\mu\nu}$ で置き換えたものが、重力と物質の相互作用を表す。

・ダークマターの存在を仮定しない修正重力理論。

修正重力理論が成功するには次の観測データと一致しなければならない。

1. 等価原理の地上における測定(エトヴェシュの実験)、カッシーニ探査機による電波の時間遅延を含めた太陽系の惑星に関するあらゆる正確な観測データ。
2. 連星パルサー PSR1913+16 のデータ。
3. 銀河の回転曲線。
4. X線銀河団の質量分布。
5. 銀河や銀河団による様々な強さの重力レンズ効果。
6. 合体しつつある銀河団による重力レンズ効果のデータ。
7. 宇宙マイクロ波背景放射のデータ、とくにCMBのパワースペクトルにおける音響波。
8. 大規模な銀河探索による物質パワースペクトルで明らかとなった、初期宇宙で始まった銀河の形成と成長。
9. 超新星のデータにより決定された、宇宙膨張の加速の観測値。

そしてモファットのMOGでは、下記の事を説明できるとして。

1. WMAPや気象観測や銀河探索と一致する音響パワースペクトルや物質パワースペクトルがMODから導かれる。
2. 超新星の高度と距離の関係も、超新星の観測結果と一致する。

いづれも、ダークマターを使わず、またアインシュタインの宇宙定数も明示的に使わずにMOGの場から生じるダークエネルギーによって説明できる。

MOGと宇宙論の標準モデルとの差異。モファットの持論。

1. 距離や時間に応じて重力結合定数が変化する。
MOGでは天体が重力源から遠いほど、その天体に作用する重力は強くなる。
距離に伴って重力が強くなるのは、ある一定の距離までで、その距離は重力系の大きさによって決まる。
この距離より遠くでは、MOGの重力法則はニュートンの逆二乗則と同じになる。
比較的短距離ではMOGとアインシュタインの理論は同じになる。
2. 時空全体に広がる或る場のエネルギーを仮定すると、特異点が一つもない非特異な厳密解が導ける。
この解はブラックホールの事象の地平面をもたない「グレースター」。
MOGでは崩壊した恒星の最終状態を事象の地平線が取り囲んでおらず、その中心に真正特異点が存在しないような解が存在しうる。
3. アインシュタインの重力理論において、崩壊する恒星の中心近くに、負のエネルギー密度や圧力を与えるスカラー場やベクトル場を導入すると、恒星が密度無限大の特異点へ崩壊するのを防げる。
特異点を含まない外部重力場の時空の幾何が導かれる。

時空に広がる風変わりな場のエネルギーを持たないアインシュタイン重力理論へ戻すと必然的にブラックホールが存在することになる。
恒星が崩壊する途中で、恒星内のダークエネルギーが負の圧力を生み出しはじめ、崩壊が止まる。
負の圧力は重力と釣り合い、恒星中心に密度無限大の特異点が形成されるのを防ぐ。
MOGから導かれるこの天体はブラックホールではなく、通常の死んだ恒星に似た表面をもつグレースターになる。

4. 宇宙の加速膨張を説明するのにダークエネルギー、真空エネルギー、アインシュタインの宇宙定数、などの名前が使われているが、モファットはこれを、負の圧力と密度をもった”新たな場のエネルギー”と考え、それが時空全体にあまねく存在しているとする。

これらは局所ローレンツ不変性、一般共変性という重力の対称性を破らない。
この種のエネルギーが示す負の圧力によって、「ホーキング・ペンローズの定理」の前提となる、崩壊する天体は事象の地平面と中心の真正特異点を作るという仮定が破られることになる。

5. 宇宙はブラックホール物理学によって何十年も信じ込まされてきたほど奇妙でないかも知れない。奇妙な非局所的ホログラム挙動や、ブラックホールの相補性原理を仮定したり、量子もつれを引き合いに出して恒星崩壊の最終状態における通常の物理を記述したりする必要はない。
ブラックホールの存在を示す証拠は、今のところすべて状況証拠にすぎない。

8-008-03

モファットのMOG

※ 修正重力理論に関しては、拙著の”世界＋実存＋存在”のNO－1の第1部3章の3-039の”モファット 修正重力理論”にも記載した。

モファットの理論は、STG → MSTG → STVG の順に発表された。

・STVG (スカラー＝テンソル＝ベクトル重力理論)

大きく以下の3つに基づいている。

1. 対称的なアインシュタインテンソル。
2. ファイオン場と名付けるベクトル場。
3. 3つのスカラー場。

ファイオン粒子は第5の力を伝え、スカラー場はそれぞれ、重力定数の変化、ファイオン場と物質との相互作用、ファイオン場の有効質量を記述する。

- ・理論は安定で、負のエネルギーモードを持たず、特異点を生じないことを証明できた。
- ・非バリオン性のダークマターの存在を仮定せずに銀河の回転のデータやX線銀河団の質量分布と一致した。
- ・アインシュタインの重力理論からは巨大ブラックホールが銀河中心に存在すると予想されるが、MOGの場の方程式を解き、重力や物質と相互作用する「重いファイオン場」をそこに含め、

Gを変動させると天体外部における球対称の解は、シュバルツシルト解と違ってくる。
 そのようなMOGの方程式の解(銀河中心の重い天体)を「スーパースター」と呼んでいる。

- MOGにおける変動する重力結合定数G、新たな反発的な場のエネルギー、そしてMOGのファイオン場を使うことで、崩壊した重い恒星の周囲の静的な球対称場に対する、有限で「非特異」で「事象の地平面をもたない」重力場の方程式の解を得ることができる。
 崩壊した恒星の最終状態を事象の地平面が取り囲んでおらず、その中心に真正特異点が存在しないような解が存在し得る。

- モファットのMOGの概略。

2スカラー、テンソル、ベクトルフィールドを含む。MOG非対称重力理論(NGT9)の調査の結果として進化し、最近ではスカラーテンソルベクトル重力(STVG2)の形をとっている。
 弱いフィールド近似では、STVG、NGT、およびメトリックスキューテンソル重力理論(MSTG10)は同様の結果を生じる。

- MOGの作用。

$$S = S_G + S_\phi + S_S + S_M,$$

S_M は物質の作用。

$$S_G = -\frac{1}{16\pi} \int \frac{1}{G} (R + 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x,$$

$$S_\phi = - \int \omega \left[\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mu^2 \phi_\mu \phi^\mu + V_\phi(\phi) \right] \sqrt{-g} d^4x,$$

$$S_S = \int \frac{1}{G} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\nabla_\mu G \nabla_\nu G}{G^2} + \frac{\nabla_\mu \mu \nabla_\nu \mu}{\mu^2} - \nabla_\mu \omega \nabla_\nu \omega \right) - \frac{V_G(G)}{G^2} - \frac{V_\mu(\mu)}{\mu^2} - V_\omega(\omega) \right] \sqrt{-g} d^4x.$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu,$$

$$V_\phi(\phi), V_G(G), V_\omega(\omega), V_\mu(\mu)$$

各々、ベクトル場と3つのスカラー場との間の自己相互作用ポテンシャル。

S_G : 時空の幾何学を記述する作用。

S_ϕ : マクスウェル・プロカ・ラグランジアン密度を介した「第5フォース」ベクトル場 ϕ_μ を導入。
 μ はベクトルフィールドの質量であり、 ω は「第5の力」と物質との間の結合の強度を特徴付ける。
 V_ϕ は自己相互作用のポテンシャル。

S_S : ここで、 ∇_μ は、メトリック $g^{\mu\nu}$ に対する共変微分、一方 V_G, V_μ, V_ω はスカラー場に関連する自己相互作用のポテンシャル。

- リッチテンソル。

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda.$$

- 応力エネルギーテンソルは、メトリックに関して物質作用 S_M を変化させて得る。

$$T_M^{\mu\nu} = -2(-g)^{-1/2} \delta S_M / \delta g_{\mu\nu}.$$

S_ϕ, S_S に関しても

$$T_\phi^{\mu\nu} = -2(-g)^{-1/2} [\delta S_\phi / \delta g_{\mu\nu}],$$

$$T_S^{\mu\nu} = -2(-g)^{-1/2} [\delta S_S / \delta g_{\mu\nu}].$$

トータルのエネルギーテンソルは、 $T^{\mu\nu} = T_M^{\mu\nu} + T_\phi^{\mu\nu} + T_S^{\mu\nu}.$

$$T_{\phi\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left[B_\mu^\alpha B_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu} \left(B^{\rho\alpha} B_{\rho\alpha} + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^\mu \phi_\mu \right) \right].$$

•MOGの場の方程式。

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

$$Q_{\mu\nu} = \frac{2}{G^2}(\partial^\alpha G \partial_\alpha G g_{\mu\nu} - \partial_\mu G \partial_\nu G) - \frac{1}{G}(\square G g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \partial_\nu G)$$

•加速度則。(例の一つ)

重力源の球状対称フィールド内を移動する粒子の場合。

$$\text{加速度。} \quad \ddot{r} = -\frac{G_N M}{r^2} [1 + \alpha - \alpha(1 + \mu r)e^{-\mu r}],$$

ここで M はソース質量で、一方、 α は「第 5 力」の相互作用の強さを決定する。 μ は、その範囲を制御する。

$$\alpha = \frac{M}{(\sqrt{M} + E)^2} \left(\frac{G_\infty}{G_N} - 1 \right), \quad \mu = \frac{D}{\sqrt{M}}.$$

この解は、近似解を導出することによって球状対称の場合におけるフィールド方程式を満たすことがわかる。D と E の数値は銀河の回転曲線に対して結果を照合することによって決定される。

$$D \simeq 6250 M_\odot^{1/2} \text{kpc}^{-1},$$

$$E \simeq 25000 M_\odot^{1/2}.$$

上記の加速度式は、一般的に使用される湯川の形で書き換えられる。

$$\ddot{r} = -\frac{G_Y M}{r^2} \left[1 + \alpha_Y \left(1 + \frac{r}{\lambda} \right) e^{-r/\lambda} \right], \quad G_Y = \frac{G_N}{1 + \alpha_Y},$$

$$\text{湯川パラメータ} \quad \alpha_Y = -\frac{(G_\infty - G_N)M}{(G_\infty - G_N)M + G_N(\sqrt{M} + E)^2},$$

$$\lambda = 1/\mu = \frac{\sqrt{M}}{D}.$$

また、加速度の式を下記のように表現できる。

$$\ddot{r} = -\frac{G_{\text{eff}} M}{r^2}, \quad G_{\text{eff}} = G_N [1 + \alpha - \alpha(1 + \mu r)e^{-\mu r}].$$

メトリックパラメータ。B(r)

$$B(r) = 1 - \frac{2G_N M}{r} + \frac{(1 + \alpha)G_N^2 M^2}{r^2}.$$

球対称で電荷を帯びたブラックホールを表現する計量 (metric) である
ライシュナー・ノルドシュトロム解の数値との比較で同じ曲線をプロットする。

•加速則はポテンシャルに関連付けられている

$$\Phi = -\frac{G_\infty M}{r} \left[1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} e^{-\mu r} \right] = \Phi_N + \Phi_Y,$$

$$\Phi_N = -\frac{G_\infty M}{r} \quad \text{は、} \quad G_\infty = (1 + \alpha)G_N \quad \text{を重力として持つニュートン重力定数。}$$

$$\Phi_Y = \frac{\alpha}{1 + \alpha} G_\infty M \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad \text{は湯川ポテンシャル。}$$

$G_\infty \simeq 20G_N$ の値は、地平線距離で重力の有効強度が G_N の約6倍であることを保証するように設定されており、宇宙論的計算で冷たい暗黒物質の必要性を排除する。

・ライシュナー・ノルドシュトロム解。

アインシュタイン方程式は非線形方程式であり、それに対称性を課すことで厳密解を得ることができる。

BHは天体物理的なものと素粒子的なものがある。前者は恒星の重力崩壊で形成され、サイズ・質量は様々あるが電氣的に中性である。後者はそれ自体が素粒子であるので電荷をもっていると考ええる。

サイズは素粒子サイズ。

中性ブラックホールとしてシュバルツシルト解、カー解。帯電したものとしてライシュナー・ノルドシュトロム解がある。

・静的で球対称な解。シュバルツシルト解。

真空静的ならば解はシュバルツシルト解になる(バーコフの定理)

$$f(r) = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad r_g := \frac{2GM}{c^2}$$

$r = r_g$ で $f(r) = 0$: ブラックホールの表面を表す。

原点 $r=0$ のみが真の特異点。

$r < r_g$ で、 $f(r) < 0$: 時間座標 t が空間座標のように、動径座標 r が時間座標のように動的にふるまう。

$r > r_g$: 時空の静的な領域。

・電場を伴う球対称解。ライシュナー・ノルドシュトロム解。

$$f(r) = 1 - \frac{r_g}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (Q^2 := \alpha q^2, \quad \alpha = \frac{4\pi G}{\mu_0 c^5}) \quad q \text{ は電荷に比例する定数。}$$

系の作用は重力と電磁場からなる。

$$S = \frac{c^3}{16\pi G} \int R \sqrt{-g} d^4x - \frac{1}{4\mu_0} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x$$

計量について変分をとることでアインシュタイン方程式を得る。

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{\mu_0 c^3} \left(F_{\mu}^{\alpha} F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right)$$

トレースを両辺にとると、右辺がゼロになるため、 $R = 0$ となる。

$$f(r) = 0 \quad \text{の根は} \quad r_{\pm} = \frac{r_g \pm \sqrt{r_g^2 - 4Q^2}}{2} \quad r = r_+ \quad \text{が事象の地平面}$$

$r_g^2 > 4Q^2$ の場合。

$$r > r_+ \quad r_+ > r > r_- \quad r_- > r > 0.$$

時間的 空間的 時間的

シュバルツシルト時空と異なるのは、BHの内側の $r_- > r > 0$ 領域で、

時間座標が再び時間方向に向く、ことである。

したがって真の特異点が存在する $r = 0$ は因果構造としては時間方向に向いていることを意味し、仮にBHの内部に入る観測者がいるとすれば、特異点に当たることなく他の宇宙へ通り抜けられる？ ことを意味する。

$$r_g^2 = 4Q^2 \quad \text{の場合。}$$

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad \text{から、} \quad \frac{GM}{c^2} = |Q|$$

重力と電磁気力の釣り合いの条件にんっている。

この場合多重ブラックホール解が構成できる。(マジュンダー・パパペトロウ解)。

$$r_g^2 < 4Q^2 \quad \text{の場合。}$$

$f(r) = 0$ の根がない。

事象の地平面は存在せず、 $r = 0$ が外部から観測できる裸の特異点となっている。

現実には存在しないと考えられている。

8-010

一様等方宇宙でのフリードマン方程式。

大域的に宇宙は一様等方である。(宇宙原理)

しかし現実の宇宙は一様ではなくズレがある。非一様性が小さい場合は第0近似として一様宇宙を考える。

揺らぎは一様宇宙からの摂動と考える。様々なスケールでの温度揺らぎによる非等方性は平均すると等方に近い。

1. 時空の性質から決まる幾何学的な量であるアインシュタインテンソルを、物質分布に対応するエネルギー運動量テンソルと結びつける。

$$\text{アインシュタインテンソル} \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

粘性と熱伝導がなく圧力が等方である完全流体の場合、流体が静止している系での密度を ρ 、圧力を P として、完全流体のエネルギー運動量テンソルは対角成分のみが残る。

$$T^{\mu}_{\nu} = \text{diag}(-\rho c^2, P, P, P)$$

一様等方宇宙では流体の速度はゼロという制限を受けるため完全流体では上記の式と同じになる。

エネルギー運動量テンソルはアインシュタインテンソルと同じ保存則を満たす。 $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$

それを利用して G^{μ}_{ν} と T^{μ}_{ν} を、 $G^{\mu}_{\nu} = k^2 T^{\mu}_{\nu}$ の関係で結び付けた。

係数 k^2 は、弱い重力の極限で、ニュートン理論でのポアソン方程式を再現するという要請から、 $\frac{8\pi G}{c^4}$ とした。

$$G^{\mu}_{\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu}_{\nu} \quad \text{となる。}$$

2. エネルギー・運動量テンソルに対して、アインシュタイン方程式を書き下す。

その、(00)成分、(11)成分から、以下の2つの独立なフリードマン方程式を得る。

$$(1) \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} \quad (2) \quad 3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi G\frac{P}{c^2} - \frac{Kc^2}{a^2}$$

第2式は、(22),(33) 成分からも同じ式が出る。

・宇宙定数 Λ がある場合。

$$(3) \quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad 3H^2 + 2\dot{H} = -8\pi G\frac{P}{c^2} - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{1}{2}\Lambda c^2$$

3. 両式から $\frac{Kc^2}{a^2}$ を消去して次を得る。 $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) \quad (4) \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

(宇宙定数 Λ がある場合)。

4. 物質の状態方程式。 $\omega = \frac{P}{\rho c^2}$

$$\omega > -\frac{1}{3} \Rightarrow \ddot{a} < 0 \quad \text{減速膨張}$$

$$\omega < -\frac{1}{3} \Rightarrow \ddot{a} > 0 \quad \text{加速膨張}$$

・宇宙項 Λ が無く ($\Lambda = 0$)、エネルギー密度も圧力も非負の場合、 $\rho \geq 0, P \geq 0$
右辺は負になるため $\ddot{a} < 0$ となり減速膨張する。

5. ダークエネルギーの状態方程式による分類。 $\omega = \frac{P_X}{\rho_X}$

・ $-1 < \omega < 0$: 穏やかなポテンシャルを持つスカラー場(クインテッセンス)

位相欠陥のネットワーク。 コズミックストリング $\omega = -1/3$

ドメインウォール $\omega = -2/3$

・ $\omega = -1$: 宇宙定数

・ $\omega < -1$: 重力と結合したスカラー場(拡張されたクインテッセンス)

$$\text{上記(1),(2)式から } H^2 \text{ を消去すると、} \quad \dot{H} = -4\pi G(1 + \omega)\rho + \frac{Kc^2}{a^2}$$

平坦な宇宙($K=0$)で $\rho > 0$ の時、 $\omega > -1$ なら H は減少し、 $\omega = -1$ なら H は一定。

6. 連続方程式。

上記(3)式を時間に関して微分すると、(C=1とする)
これに式(4)を用いると、以下になる。

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3} \left(\dot{\rho} \frac{a}{\dot{a}} + 2\rho \right) + \frac{\Lambda}{3}$$

$$(5) \quad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0 \quad \text{これは、「エネルギー運動量テンソルの保存則」に対応する。}$$

7. 宇宙の膨張。

状態方程式 $\omega = \frac{P}{\rho c^2}$ が一定の時、(5)式は積分できる。

$$(5) \text{式を、} \quad \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega) = 0 \rightarrow \dot{\rho} = -3\frac{1}{a}\frac{da}{dt}(1 + \omega) \quad \text{に変形し時間 } t \text{ で積分する。}$$

$$\int \frac{d\rho}{dt} dt = -3(1 + \omega) \int \frac{1}{a} \frac{da}{dt} dt \rightarrow \rho = -3(1 + \omega) \log a \rightarrow \rho = \log a^{-3(1 + \omega)}$$

よって、 $\rho \propto a^{-3(1 + \omega)}$ を得る。 (式 7-1)

・物質(非相対論的物質)、放射(相対論的物質)、宇宙定数の場合はそれぞれの ω は、

$$\omega = 0, \quad \omega = \frac{1}{3}, \quad \omega = -1 \quad \text{である。}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{・物質優勢期(非相対論的物質)の場合。} \quad \rho \propto a^{-3} \quad a \propto t^{2/3} \\ \text{・輻射優勢期(相対論的物質)は} \quad \omega = 1/3 \quad \text{なのでそのエネルギー密度は} \quad \rho \propto a^{-4} \\ \quad \varepsilon_r = \rho_r c^2 \propto a^{-4} \quad a \propto t^{1/2} \\ \text{・宇宙定数。} \quad \omega = \frac{P}{\rho}, \quad \omega = -1 \rightarrow P = -\rho \quad a \propto e^{Ht} \\ \quad (5) \text{式から} \quad \dot{\rho} = 0 \quad \text{時間に関して一定の定数。} \end{array} \right.$$

・K=0の平坦な場合。

フリードマン方程式 $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$ に(式 7-1)を代入して解くと、

$$a \propto t^n, \quad n = \frac{2}{3(1 + \omega)} \quad \cdot \omega > -1/3 \quad \text{である限り } n < 1 \text{ で、} \quad \ddot{a} \propto n(n - 1)t^{n-2} \text{ で減速膨張。}$$

$\omega > -1/3,$ で宇宙は減速膨張。

$\omega < -1/3,$ で宇宙は加速膨張。

$\omega = -1$ で宇宙項の場合は ρ は一定となり、 $a \propto e^{H_* t}, \quad H_* = \sqrt{8\pi G \rho / 3}$
宇宙項優勢宇宙は指数関数的に膨張する。これがインフレーション。

・宇宙の加速膨張は、輻射優勢期よりも前の宇宙初期と、物質優勢期が終わった後に起こった、とされる。

8-011

初期の量子重力理論。

ホイーラー・ドウィット方程式と、ビレンケン”無”からの創造。

プランク長よりも小さいスケールでは、時空構造の量子性を考慮した理論が必要になる。

• ビレンケン。

「無」の状態からトンネル効果によって宇宙が生じる。

正の宇宙項 Λ をもつ閉じた宇宙 ($K>0$) をミニ超空間として考えた。• 時刻 $t=0$ に宇宙が収縮から膨張に転じ、ド・ジッター宇宙に近づく古典解を求める。

$$\text{宇宙項 } \Lambda \text{ と、物質場 } (S_M) \text{ があるときの作用。 } S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_M$$

ここで物質場が無い場合 ($S_M = 0$)、古典的な運動方程式は、($\rho = P = 0$) に相当する。
 $K=1$ とした場合、(3)式から、

$$\dot{a}^2 + 1 - \frac{a^2 \Lambda}{3} = 0 \quad \text{式-①} \quad \text{解は、 } a(t) = a_0 \cosh\left(\frac{t}{a_0}\right), \quad a_0 = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$$

• 正準量子化。作用からハミルトニアンを求める。

$$\text{曲率 } R, \quad R = \frac{6}{c^2} \left(2H^2 + \dot{H} + \frac{Kc^2}{a^2} \right) \quad \text{3次元球体積、} \int d^3x \sqrt{-g} = \frac{2\pi^2}{K^{3/2}}$$

以上から 時間についての部分積分を使って、

$$S = \frac{m_{pl}^2}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) = \frac{3\pi m_{pl}^2}{4} \int dt \left(\dot{a} - a\dot{a}^2 - \frac{1}{3}\Lambda a^2 \right)$$

ハミルトニアン H は、 $H_c = p\dot{a} - \mathcal{L}$, ($p = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{a} = -(3\pi/2)m_{pl}^2 a\dot{a}$)

$$H_c = -\frac{1}{3\pi m_{pl}^2} \left[\frac{p^2}{a} + \frac{9\pi^2 m_{pl}^4}{4} \left(a - \frac{1}{3}\Lambda a^3 \right) \right] \quad \text{式-②}$$

• ハミルトン拘束条件。①式から $H_c = 0$

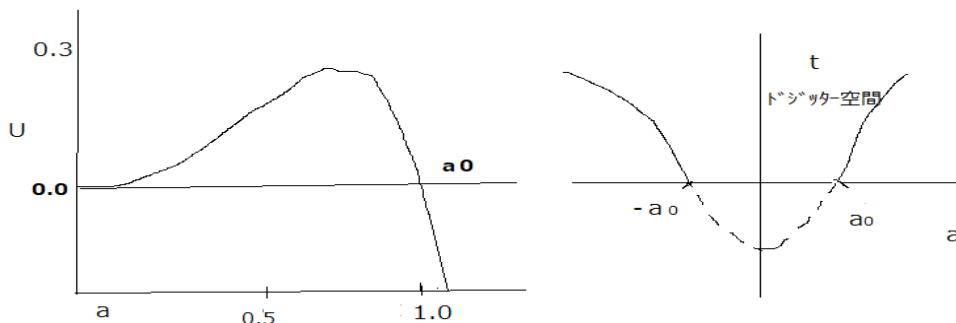
• シュレディンガー方程式

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_c \psi \mapsto \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad \phi \text{ は時間 } t \text{ に依存しない。}$$

• ホイーラー・ドウィット方程式

ϕ の取り得る状態は、式②で、 $p = -i\partial/\partial a$ として、 H_c を演算子としたものに ϕ を作用させた式、
 $H_c \psi = 0$ から決まる。 ϕ は宇宙の波動関数。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} - U(a) \right] \psi(a) = 0, \quad U(a) = \frac{27\pi^2 m_{pl}^4}{4\Lambda} \left[\left(\frac{a}{a_0} \right)^2 - \left(\frac{a}{a_0} \right)^4 \right],$$



左図から、 $U(a)$ は $a=0$ と $a=a_0$ でゼロで、 $a/a_0 = 1/\sqrt{2}$ で最大値をもつ。

古典的に許される領域は $a > a_0$ であり、ドジッター解はこの領域の解である。

8-012-04

Dブレーン宇宙論。

私見。

ブレーンと言っても、存在が観測され確認されているわけではない。数学的にそれも多くの方説の上に構築されたものであり、その仮定の上に堅固な宇宙論を築くというもおかしなものの非科学的なことではある。だがアインシュタインの一般相対性理論も大した測定や観測もなく、数学的理論と直観で作られたものであるから、あながち全面的に否定することもないのかも知れない。ただそれも一般的包括的な理論の前では特殊な近似である、というの確かなことである。だからこの余剰次元というもののブレーンというものの、実在に近づくあるいは新たな知見を得る過程のなかでの或る種の模型と考えるのが適当なところだろう。

まず余剰次元というものの出自から考える必要がある。これ自体も測定、観測もされずただ存在すると仮定されているものにすぎない。これも数学的産物である。あるいは、この先何が発見されるか解らないので、今のところと付け加えておいた方がいいのかもしれない。

- Dブレーンと紐。

開いた紐は、力を表すゲージ場。力で結び付く物質もブレーンに拘束される。余剰次元を伝搬できるのは閉じた紐で重力子。ブレーンの厚さは10のマイナス17乗センチ以下であれば現在の高エネルギー実験と矛盾しない。

開弦の端はDブレーン上を自由に動けるが垂直方向には動けない。ディリクレ境界条件。

Dブレーンは閉弦を生み出したり、吸収したりする面。

- ブレーン宇宙モデルには大きく二つがある。

一つは、大余剰次元モデル(ADDモデル)、もう一つはランドール・サンドラムモデル(RS)である。

カルーツァ・クラインコンパクト化、大余剰次元モデルの2つとも、「余剰次元をコンパクト化」しなければならないが、RSモデルはコンパクト化しない余剰次元モデルである。

RSモデルは5次元バルク時空中にブレーンを考える。バルク時空はAdS時空である。

ブレーンの自己重力により余剰次元が指数関数的に湾曲した模型。

RSモデルでは、負の宇宙定数により、重力子の満たすべき方程式に火山型のポテンシャルが現れ、低エネルギー重力子はその火口に閉じ込められる(火口がブレーン)。その結果4次元重力はブレーンに拘束されニュートン的な逆二乗則が実現する。重力が強い状況でも低エネルギー極限ではアインシュタイン重力が再現される。

大余剰次元モデルは基本的にはカルーツァ・クライン宇宙論と変わりがない。

RS理論では、一般相対論には含まれない二つの項が現れる。1. 密度の自乗に反比例する項、2. スケール因子の逆4乗に比例する項である。後者は数式的に輻射密度と同じ振舞いをするので「暗黒輻射」という。

- ブレーン宇宙の基礎方程式は最初5次元時空を解くことで得られた。それが5次元AdS解(5次元ブラックホール時空)の中を運動する3次元超曲面と等価であることが解った。

その結果、暗黒輻射に含まれる定数が5次元ブラックホールの質量に相当していることが解った。

余剰次元にブラックホールがあるとすると、我々が生きるブレーン宇宙では「輻射」があるように宇宙膨張を通じて感じる。

- 4次元の一様等方宇宙モデルは、5次元シュバルツシルト・AdS時空上を運動する「薄膜」として記述される。我々の宇宙である4次元ミンコフスキー時空は、5次元AdS時空に浮かんでいるという描像になる。

- 高次元ブラックホール。

ブレーン上の重力は、大きなスケールでは4次元的に、小さなスケールでは高次元的に振舞う。

n次元では、
$$V(r) \sim \frac{G_n}{r^{n-3}}$$

高次元では重力ポテンシャルの半径依存性が強くなる。

したがってシュバルツシルト半径 $r = \frac{2GM}{C^2}$ が大きくなり通常よりもBHが形成されやすくなる。

- ミニブラックホールの生成。

BHが形成されるためには物質をその全質量で決まるシュバルツシルト半径内に押し込める必要がある。

4次元時空においてBHを作ることとは不可能である。ブレーンワールドの場合は小さなスケールでは高次元的に振舞うので4次元の場合のシュバルツシルト半径に比較すると大きくなる。

- RSモデルの宇宙論への一般化。

ブレーン上の重力方程式(ブレーン上のアインシュタイン方程式)を求める。

1枚の正張力ブレーンを考える。

5次元全体の時空として、シュバルツシルト・反ドジッター時空を考える。

ブレーンの自己重力により余剰次元が指数関数的に湾曲した5次元模型。

普通の物質はブレーン上に閉じ込められていて、ブレーンを中心に左右対称(Z2対称性)とする。
(ブレーンの張力、ブレーン上の物質は5次元アインシュタイン方程式で見ると、 $y=0$ にデルタ関数的に存在する)

系の全作用。

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int (R^{(5)} - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^5x + \int (-\sigma + \mathcal{L}) \sqrt{-q} d^4x$$

第1項: バルク作用。 Λ は5次元時空の宇宙項。5次元アインシュタイン・ヒルベルト作用。

第2項: ブレーン張力 σ と4次元の物質の作用密度ラグランジアン $\mathcal{L}$ の和からなる、 q はブレーン上の計量。

1. 5次元を4次元(ブレーン)に幾何学的に射影する。(ガウス・コダッチ分解)
ガウス方程式のうち二つの添え字に対して縮約をとり、それを用いて4次元のアインシュタインテンソルを5次元のリーマンテンソルと外曲率で書く。
(D次元時空の幾何学量とD-1次元部分超曲面の幾何学量との間に、ガウス・コダッチ方程式が存在する)

ブレーン上の外曲率がブレーン上の物質によって決まる。(イスラエルの接続条件)

2. 5次元のリーマンテンソルを5次元のワイルテンソルとリッチテンソルで書き直す。
5次元のリッチテンソルは、5次元のエネルギー運動量テンソルに書き直す。
3. ブレーン上で外曲率がイスラエルの接続条件から4次元のエネルギー運動量テンソルで書ける
2層間の接続条件。時空間の接続。
結局、ブレーン上で成り立つアインシュタイン方程式は以下になる。

$$G_{\mu\nu}^{(4)} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + 8\pi G \tau_{\mu\nu} + \kappa^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}$$

$$\text{あるいは、} \quad R_{\mu\nu}^{(4)} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu} R^{(4)} = -\Lambda_4 q_{\mu\nu} + 8\pi G_4 T_{\mu\nu} + \kappa^4 \pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}$$

右辺の第3、第4項が補正項。低エネルギーでは両方とも無視することができる。

E は、5次元のワイルテンソルの一部で、バルク時空からの重力波、あるいは非一様性からくる。
※この重力方程式は、5次元を4次元に射影しただけ。

- ・一様等方宇宙モデルでの、ブレーン上のフリードマン方程式。

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad \text{4次元のフリードマン方程式(1).}$$

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G_4}{3} \rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{\kappa^4 \rho^2}{36} + \frac{m}{a^4} \quad \text{ブレーン上のフリードマン方程式(1).}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3} (\rho + P) \quad \text{4次元のフリードマン方程式(2).}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3} (\rho + P) - \frac{\kappa^4}{36} \rho(2\rho + 3P) - \frac{m}{a^4} \quad \text{ブレーン上のフリードマン方程式(2).}$$

4次元とブレーン上の式を比較した場合。

$\frac{m}{a^4}$ は、5次元シュバルツシルト・反ドジッター・ブラックホールの質量が起源。
スケール因子 a 依存性は輻射と同じ。この項はBHが無ければ消失する項。
ブレーン上の物質としての輻射とは異なる。暗黒輻射。
余剰次元にブラックホールがあるとすると、我々が生きるブレーン宇宙では「輻射」があるように宇宙膨張を通じて感じる。

$$\kappa^4 \rho^2, \quad \kappa^4 \rho(2\rho + 3P)$$

ブレーン張力 σ が、 $\sigma \geq \rho, P$ を満たす低エネルギーの場合は無視できる。

以上で、 $m=0$ 、かつ低エネルギーの場合は、4次元アインシュタイン方程式が予言するものと一致する。

※ 4次元の一様等方宇宙モデルでは、5次元シュバルツシルト・反ドジッター時空を運動する薄膜として記述できる。

ある極限で、暗黒輻射から評価されるエントロピーとBHエントロピーが一致する。
ブレーン上で成り立つアインシュタイン方程式の第3項は、ブレーンのフリードマン方程式の ρ^2 の項に、第4項は5次元BHの質量パラメータに比例する暗黒輻射の項にそれぞれ対応する。

5. エキピロティック宇宙論(周期宇宙論)。
超弦理論に基づくバウンス宇宙論。

コンパクト化を行った際に得られる4次元時空における有効作用は低エネルギー極限で一般相対論を再現する。バルク(余剰次元)の中に、距離がスカラー場 ϕ で特徴づけられる2枚の平行なブレーンを想定する。ブレーン間に負の指数関数型ポテンシャルで記述される引力が働くことで、ブレーンに衝突が起こり、それによりビッグバンが始まったとする。

$$V_E(\phi) = -V_0 \exp(-\sqrt{2/p} \phi), \quad (V_0 > 0, 0 < p < 1)$$

アインシュタイン系の作用に、 $V_E(\phi)$ を加えると、ブレーン上の FLRW 計量での次の解が存在する。

$$\hat{a} \propto (-\hat{t})^p, \quad \hat{H} = p/\hat{t}, \quad \dot{\phi} = \sqrt{2p/\hat{t}}, \quad V_E = p(1-3p)/\hat{t}^2$$

- $p = 1/3$ がプレ・ビッグバン模型に対応する。
- エキピロティック模型では、 $0 < p < 1$ であり、 $\hat{t} < 0$ でのゆっくりした宇宙の収縮に対応する。
- ブレーンの衝突は、 $\hat{t} = 0$ での特異点に相当する。
高次の補正項によって特異点回避は可能だが、 $\hat{t} = 0$ 付近で、負のポテンシャル $V_E(\phi)$ の寄与が小さくなるという仮定が必要。

超弦理論には、重力子とともに現れるスカラー場 ϕ (ディラトン)が存在する。ディラトンの真空期待値が理論の結合定数に相当する。 $g_s = e^{\langle \psi \rangle}$

弱結合領域 $g_s \leq 1$ での、4次元時空での超弦理論の有効作用は、 $M_{\text{pl}} = 1$ の単位系を用いると、

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\varphi} \left[\frac{1}{2} R + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \dots \right]$$

これに $\varphi = -\sqrt{2}\phi$ とおいた作用はプランク・ディッケ理論の作用。

・プランク・ディッケ理論。

重力がスカラー場 χ によって媒介される理論(1961)。

作用は、場 χ が、スカラー曲率 R と結合している。重力が疎力にならないように $\chi > 0$ の条件を課す。曲率 R は物質に依存し、 R と χ の直接結合のため、物質は χ と間接的に結合している。

χ と R が直接結合している系を「ジョルダン系」、 χ と曲率の直接結合がない系を「アインシュタイン系」。共形変換をジョルダン系の作用に施すと場 χ と曲率の間の直接結合がなくなりアインシュタイン系に移る。

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad (\text{アインシュタイン系にはハットをつける})$$

そして χ と R の直接結合をなくすために、 $\Omega = \sqrt{\chi}$ と選ぶ。

・ジョルダン系の作用で、平坦なFLRW計量での基礎方程式から、 $t < 0$ で次の解をもつ。

$$a \propto (-t)^{-1/\sqrt{3}}, \quad H = -\frac{1}{\sqrt{3}t} \quad (\text{式-001})$$

$t \rightarrow -\infty$ で、 $g_s = e^{\psi} \rightarrow 0$ であり、弱結合の極限に対応する。

$t < 0$ の領域で、 t が増加すると、 H は増加する (スーパーインフレーション)。

$t \rightarrow -0$ の極限で、 a と H は発散する。

$t > 0$ がビッグバン宇宙に対応するとすると、 $t = 0$ での滑らかに解が接続しない。

強結合領域では、作用に高次の補正項(ガウス・ボンネ項のような)が効いてくると考えられ、そうすると $t = 0$ での特異点を回避することが可能になる。

・ $t < 0$ でのスーパーインフレーションを用いて地平線問題を解決できるとする プレ・ビッグバン模型があるが、CMBの観測と合わない。

・アインシュタイン系の作用で、式-001 に相当する解は。 $\hat{a} \propto (-\hat{t})^{1/3}, \quad \hat{H} = \frac{1}{3\hat{t}}$

$\hat{t} < 0$ で $\hat{H} < 0$ 。これは宇宙が収縮する解を表す。

$\hat{t} = 0$ が特異点になっている。

ガウス・ボンネ項のような補正項があると $\hat{t} = 0$ での特異点を回避してバウンスする解が存在しうる。バウンス後に一般相対論に近づくために、実質的にディラトン場が凍結する必要がある。

8-013

標準理論の不完全性。

今までの既成の権威としての標準理論と言われるものが疑われ始めているのを私は感じる。

一般相対性理論も検証のスケールは限定的だし、超弦理論も検証もないままだ数学的な整合性が優先されて進んでいる。ほかの理論も同じ。宇宙物理学においてはブラックホール (BH)、ダークマター (DM) ダークエネルギー (DE) の存在は常識的で疑問の余地がないものと見做されている。

しかし、近年それらの常識に対して異論を唱える理論が出始めている。私にとって面白いものとしてモファットらの修正重力理論 (MOG) や、浜田賢二らによる漸近的背景自由な量子重力理論などがある。ほかにも様々なものが出ているが信憑性に問題がある。

それらの理論は、BH、DM、DEに対しても、既存の標準理論としての解釈に疑問を呈している。あるいはそれらが存在しなくても観測結果を説明し得る理論になっている。と主張する。日本でも向山らがそうである。

宇宙の加速度膨張を説明するのに導入された真空のエネルギー、ダークエネルギー、宇宙定数と様々に呼ばれているが、その実態は明確ではない。それは、”負の圧力と密度”をもつ新たな場のエネルギーと言える。

ダークマター (DM) ダークエネルギー (DE) の存在を必要としない理論がある。

ブラックホール (BH)、DM、DEなどの存在は、標準的な宇宙論として定着している。

しかし一般相対論が検証されているスケールは $0.01\text{mm} \sim 10^{13}\text{cm}$ であり、ホライズンスケールは 10^{28}cm と 10^{15}cm の差がある。宇宙論的スケールで一般相対論の重力法則が破れている可能性も考えられる。

宇宙の加速度膨張を説明するものとして、真空エネルギー、ダークエネルギー、宇宙定数などと呼ばれている。

それらは、エネルギー密度は正だが圧力は負になる。通常の場合の場合は圧力も密度も正だ。

しかし真空エネルギーが時空の中に存在するには圧力は負でなければならない。押すのではなく引かなければならない。宇宙における真空エネルギーは量子ゆらぎから構成されていて、真空エネルギーの外側の領域では密度と圧力がゼロになる。

そして、MOGでは、”負の圧力と密度をもつDE”が導入される。

モファットらの修正重力理論 (MOG)、浜田による漸近的背景自由な量子重力理論などによる反論。

1. ブラックホールの存在。

崩壊する天体は、時空の地平線と、中心の真正特異点を作る、というホーキング・ペンローズ定理は正しいのか。

モファットはこれに対して疑問を呈している。つまり、時空全体に広がっている負の圧力と密度をもつ新たな場のエネルギーは、天体が崩壊する際に強い反発力を及ぼし、崩壊前の天体の質量がどんなに大きくても重力に打ち勝つ、としている。

天体の崩壊によってブラックホールが形成されることはないと考えている。

BH中心における密度無限大を避けつつ事象の地平線をそのまま維持するという量子重力理論やひも理論はいくつかもあるが、そのような解の有効性には疑問が多い。

MOGの変動する重力結合定数G、新たな反発する場のエネルギー、MOGのファイオン場、を使うことで、崩壊した重い恒星の周囲の球対称場に対する、有限で非特異で事象の地平面をもたない重力場の方程式の解を得ることができる。崩壊した恒星の最終状態を事象の地平面が取り囲んではいなく、その中心に真正特異点が存在しないような解が存在し得る。

MOGの場の方程式から予測されるのはスーパージェー天体。

銀河中心に何十億という恒星が重力によって高密度で安定した天体を構成し、事象の地平面をもたない。

この高密度の天体は恒星に似た表面をもち高密度の集合体は重力が強く、光はなかなか逃げられないので、光学望遠鏡では見るのは難しい。しかし十分な光が逃げれば、その天体はブラックではなくグレーになる。

この天体は時空の穴ではなく、暗く高密度な恒星状天体にすぎない。

MOGの場の方程式を解き、重力や物質と相互作用する重いファイオン場をそこに含め、Gを変動させると、天体外における球対称な解は、一般相対論におけるシュバルツシルト解と違ってくる。

MOGにおけるグレースター解は、通常の恒星の表面をもつ天体を記述していて、その大きさは一般相対論のBHと同じになる。新しい場のエネルギーが生み出す反発力でBHへと崩壊するのを防いでいる。

恒星内のダークエネルギーが負の圧力を生み出し始め、崩壊が止まる。負の圧力は重力と釣り合い恒星中心に密度無限大の特異点が形成されるのを防ぐ。

一部の情報は逃げ出せるので、情報喪失という問題は解決される。

第9章。 脳と人工知能

	ページ
9-001 脳と推論。	294
9-001-01 脳の神経系での解剖学なこと。	295
9-002 脳とDCNN（深層畳み込みニューラルネットワーク）	299
9-003 自由エネルギー原理(FEP)。	302
9-003-01 自由エネルギー原理(FEP)の数学的表現。	306
9-003-02 自由エネルギー原理の関連事項。	311
9-004 脳とコンピュータとの比較。 ※（注）	315
9-004-01 神経細胞。	315
9-004-02 小脳。	318
9-004-03 脳の情報処理の階層性。機能コラムマップ。	319
9-004-04 設計とリバースエンジニアリング。	324
9-004-05 長期増強(LTP)と記憶。	326
9-004-06 人工知能との関係。	329
9-004-07 コンピュータと脳科学。その比較。	332
9-005 意識、クオリア、心、自由意志。	336
9-005-01 茂木健一郎	337
9-005-02 エーデルマン。	338
9-005-03 意識－茂木健一郎	339
9-005-04 自由意志－茂木健一郎	339
9-006 意識の発生。	341
9-006-01 ドウアンヌによる意識の発生。	341
9-006-02 エーデルマンのTNGSによる意識の発生。	343
9-006-03 フリストンの自由エネルギー原理による意識の発生。	346
9-006-04 その他の意識の理論。	346

※（注）9-004 “脳とコンピュータの比較” は、本シリーズ、続編Ⅲ(NO-4)、第5章からそのまま複写。
 （段落番号の数字はそのまま）

パーセプトロンという線形分類器。

パーセプトロンでは重み係数は、与えられた正解の入出力から学習する。

入力 : n 次元 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 重み係数 : $w = (w_1, \dots, w_n)$

x と w が同じ方向に向いていれば $y = 1$, そうでなければ $y = -1$.

$$y = \operatorname{sgn} \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i \right) = \operatorname{sgn} (w^\top x) \quad (1)$$

P 個の入力ベクトル $\{\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^P\}$ があるとき、それに対応して望ましい出力を $\{\hat{y}^1, \dots, \hat{y}^P\}$

(ハットは、外部からの教師信号の意味)

この入力ベクトルと望ましい出力の値の組を「パーセプトロンの訓練セット」という。

ある組み $(\hat{x}^P, \hat{y}^P)$ が正しく分類されていると、 $W^\top \hat{x}^P$ と $\hat{y}^P$ が同符号であり、

$$\hat{y}^P W^\top \hat{x}^P > 0 \quad \text{正しく分類されていないと} \quad \hat{y}^P W^\top \hat{x}^P < 0$$

したがって、パーセプトロンの評価関数は、
$$-\sum_{p=1}^P \hat{y}^p \operatorname{sgn} (W^\top \hat{x}^p)$$

これを最小化することで、訓練セットの入出力関係を近似できる。

ある W が与えられたとき、正しく分類できている組に対しては W の変更の必要はないが、正しく分類できていない

場合は $\Delta W = \eta \hat{y}^P \hat{x}^P$ (2) (学習則) とすると、正しい分類ができる方向に W を変更できる。

・ノビコフのパーセプトロン収束定理。

パーセプトロンの学習則 $\Delta W = \eta \hat{y}^P \hat{x}^P$ は有限個の反復で、訓練セットのすべての組を正しく分類する重み係数 W を学習できる。

・ある重み係数 W が与えられたとき、パーセプトロンの入出力は (1) 式で決まる。間違えて分類した場合には、重み係数を (2) 式のように変更すればよい。

・パーセプトロンは、 n 個の入力の「重みづけ和」を「閾値処理」したものを出力 y に変換する。
また教師信号 $\hat{y}$ (y ハット) により、適切な重み付け係数が学習される。

・ブルキンエ細胞は、平行繊維と登上繊維からの入力を受ける。
パーセプトロンの入力は平行繊維入力、出力はブルキンエ細胞の神経活動。
「教師信号」は登上繊維入力に対応する。

4). 学習則(2)式からの予言。

① 出力が間違えた(教師信号が与えられた)とき、入力があったシナプスの重み係数が変更を受ける。

小脳皮質で言えば、登上繊維からの入力と同時に入って来た平行繊維入力に変更を受ける、ということ。

登上繊維入力が誤差信号を表すのであれば、その誤差を引き起こす原因となった入力の影響を減らしているはずで、平行繊維入力からブルキンエ細胞へのシナプス強度の減弱がある。(アルブス)

うさぎ小脳片葉で平行繊維と登上繊維が同時に入力すると、平行繊維とブルキンエ細胞のシナプス強度が低下し、この低下は数時間続く(長期抑圧 LTD)。

② 重み付け係数の変化の符号は、入力の符号による。

マーは興奮性シナプスの可塑性をのみを考えたが、アルブスは興奮性・抑制性の両方のシナプス可塑性を考えた。

ブルキンエ細胞に興奮性の入力を伝えるシナプスの強度と、抑制性の入力を伝えるシナプスの強度は、片方が増強されれば片方は抑圧される。

6. サプライズ最小化原理。

サプライズというコスト関数(目的関数、損失関数)を最小化することが生物の「目的」である。

$$\text{Surprise } S(\bar{s}) \equiv -\log p(\bar{s} | m)$$

$S \equiv S(t)$: 感覚入力のパクトル
 $p(\bar{s} | m)$: 感覚入力の真の確率分布 $p(\bar{s})$ を近似するモデル。
 m : 感覚入力を受け取る側が脳内に保持しているモデル構造。
 隠れ変数から感覚入力を生成する過程をモデル化する。生成モデル。
 $\bar{s} = (s, s', s'' \dots)$: S とその時間微分を並べたベクトル。(運動の一般化座標)
 位置、速度、加速度、 etc

脳が直接受け取ることができるのは感覚入力のみであり、コスト関数は外界の隠れ変数やパラメータを引数に含むことができないため、外界を推測し予測するという目的という意味では、サプライズは最も妥当なコスト関数の一つである。

7. サプライズ最小化原理によって脳の認知機能を統一的に「推論の最適化問題」として説明する。

知覚学習モデル、運動学習、強化学習、コミュニケーション、精神疾患、自己組織化などさまざまな機能・現象をモデル化可能である。これらの事実がサプライズ最小化原理の妥当性を指示している。
 知覚のサプライズ最小化は、背後の原因の推論、および未来の予測から構成される。

8. 自由エネルギー原理では、「知覚＝内部モデルの最適化」と定義される。

サプライズ S の期待値は、実際の入力のシャノンエントロピーよりも小さくはない。
 知覚の目的は以下を最小化することである。

$$E_{p(\bar{s})} [-\log p(\bar{s} | m) + \log p(\bar{s})] \quad \text{【 } \cdot \text{ 】内は } p(\bar{s}) \text{ についての期待値。}$$

$$\text{シャノンエントロピー } E_{p(\bar{s})} [-\log p(\bar{s})] \equiv - \int d\bar{s} p(\bar{s}) \log p(\bar{s})$$

等号は分布が一致するときのみに成立する。

- 生物の目的は、感覚入力の予測能力を最大化することである。
 情報理論では、「生物の目的は感覚入力のサプライズ(予測の難しさ)を最小化することである」。
- サプライズというコスト関数(目的関数、損失関数) を最小化することが生物の原則、とする。
- サプライズを最小化させるように振舞うことで、学習・推論を行っており、サプライズを最小化することで、脳は「ベイズ推論」を行っている、と考えられている。
- 裏付け、
 1. 初期視覚野の自発活動が「事前分布」をコードしている。
 2. シナプス可塑性が起きるに伴い、変分自由エネルギーが減少する。
- ヘルムホルツの「無意識的推論(unconscious inference) が自由エネルギーの元になる。
 工学的には「脳は無意識的につねに感覚入力の背後にあるダイナミクスと原因を推論する装置」である。
- 変分自由エネルギーは、サプライズ最小化から自然に導かれるコスト関数である。
 変分自由エネルギーの最適化問題は、変分法(変分ベイズ)により解くことができる。
- 我々は環境との相互作用を通じてエントロピーを一定の範囲に抑えることにより、ホメオスタシスを維持し、生存している。
- ベイズ推定に基づいて「無意識的推論を定式化」したとき、ヘルムホルツの自由エネルギーと同じになり自由エネルギーと等価な量を最小化することによって最適な推論を行うことができる、というもの。

9. 能動的推論 active inference 2009 フリストン。
一般化予測符号化理論(乾、..)

- 運動指令というものはなく、運動も予測(期待)と考える。

自由エネルギー原理は、「サプライズ最小化による知覚の最適化の理論」が元になっているが、同じ原理を行動の最適化にも適用可能である。としている。

- 生物は感覚入力「予測し難さ」を最小化するように、内部モデルおよび行動を最適化し続けている。
この原理から外界の認識モデルとして、「予測符号化(predictive coding)」と呼ぶ情報表現形式が導出され、「推論・学習とは、予測誤差を最小化する」ように、神経活動・シナプス結合を更新することになる。

行動についても同一の原理から導出が可能であり、「行動は、周囲の環境を予測しやすい状態に変化させ、自分の好みの入力を得るために起きる」、と説明する。これが能動的推論(active inference)である。

- 知覚、運動、行為、注意、思考、..などを一つの式から導出する。
- 神経ネットワークの構造や特性を説明する。
- 人間はシャノンのサプライズが最小になるように行動する。
- ベイズ・サプライズが最小になるように「認識的行動」によって学習する。
世界の予測能力が最大になるように学習する。

- 行動の最適化。

行動は現在の自由エネルギーを最小化するように決定される。

$$Action \propto -\frac{\partial F}{\partial a}$$

脳内の生成モデルと外界の生成過程が異なるとき、脳内の生成モデルを変化させるのではなく、行動を外界に与えることで、「外界の生成過程を脳内の生成モデルに近づける」ように最適化を行う。

サプライズ最小化の方法は、脳を外界に近づける場合と、外界を脳に近づける場合の2種類があり、最適化の観点からは2者は同じである。

- 行動方策の最適化。

行動方策は将来期待されるサプライズを最小化するように決定される。

行動は実際に外界に及ぼす運動であるが、行動方策は将来の行動のプランを意味し、脳内にのみ存在する運動を決定するパラメータである。

- 知覚の最適化と行動の最適化では、どちらも実効的にはサプライズの最小化であるが、扱う時間が異なるため、それらのコスト関数の意味合いは異なる。
知覚は過去のあるいは過去から現在までの $-\log p(s|m)$ を $-\log p(s)$ に近づけることが目的であった。
一方行動は未来の不確実性 $-\log p(s)$ を小さくするように決定される。将来にわたる不確実性を最小にするように行動方策を最適化する。
- 知覚の場合と同様に、能動的推論ではサプライズの上限值である将来に渡って期待されるエネルギーを考える(期待自由エネルギー)。
- 期待自由エネルギーの最小化は、将来の「隠れ状態」と「感覚入力」の因果関係を強くしようとしていると解釈できる。
- 最適な行動方策は、変分自由エネルギーと期待自由エネルギーの重み付き和を最小化するように決定される。
- 期待自由エネルギーを下げることで、将来望ましい感覚入力を受ける期待値が高くなる。
(以上は期待自由エネルギーの方程式から解釈される、としている)

ある時刻 $\tau \geq t + 1$ における期待自由エネルギー

$$G(\pi, \tau) = E_{Q(s_\tau, x_\tau | \pi)} \left[\log \frac{Q(s_\tau | \pi)}{Q(s_\tau | x_\tau, \pi)} - \log P(s_\tau | m) \right] \quad \text{将来にわたる和}$$

π の値により分岐が生じ、期待エネルギーは π の関数 $G(\pi) \equiv \sum_{\tau=t+1}^{\tau} G(\pi, \tau)$

実装の手順。

例題。 TransFlow / Keras による実装。

深層学習では一般的な TransFlow / Keras で実装する。

課題：今年1年間(12カ月)の月別の観測値から、来年の月別の気温を予想する。勾配降下法を用いる。

大まかな手順。

1. 与えられた「データを元にして、未知のデータを予測する数式を考える。
2. 数式に含まれるパラメータの良し悪しを判断する誤差関数を用意する。
3. 誤差関数を最小にするようにパラメータの値を決定する。

・データモデルを4次多項式 y で表せるとした場合。

$$y = w_1n + w_2n^2 + w_3n^3 + w_4n^4 + b \rightarrow y_n = \sum_{m=0}^4 w_m n^m, (b = w_0, n = 1 \cdots 12)$$

平均二乗誤差関数。

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{12} (y_n - t_n)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{12} \left(\sum_{m=0}^4 w_m n^m - t_n \right)^2$$

・ y は予測気温、 t は実測値、 X は入力データ、 w は重み係数、 n は月数。

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{12} \end{pmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{12} \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1^0 & 1^1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 12^0 & 12^1 & 12^2 & 12^3 & 12^4 \end{pmatrix}$$

正解ラベル(観測値) 計画行列(1月～12月までの予測気温を計算するための入力値になっている)

パラメータ w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 が決まれば、 $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{w}$ により、1～12月の予測値がまとめて計算できる。

$$y_n = \sum_{m=0}^4 w_m n^m \quad (n = 1 \sim 12)$$

$$y_1 = w_0 1^0 + w_1 1^1 + w_2 1^2 + w_3 1^3 + w_4 1^4$$

$$y_2 = w_0 2^0 + w_1 2^1 + w_2 2^2 + w_3 2^3 + w_4 2^4$$

$$\vdots$$

$$y_{12} = w_0 12^0 + w_1 12^1 + w_2 12^2 + w_3 12^3 + w_4 12^4$$

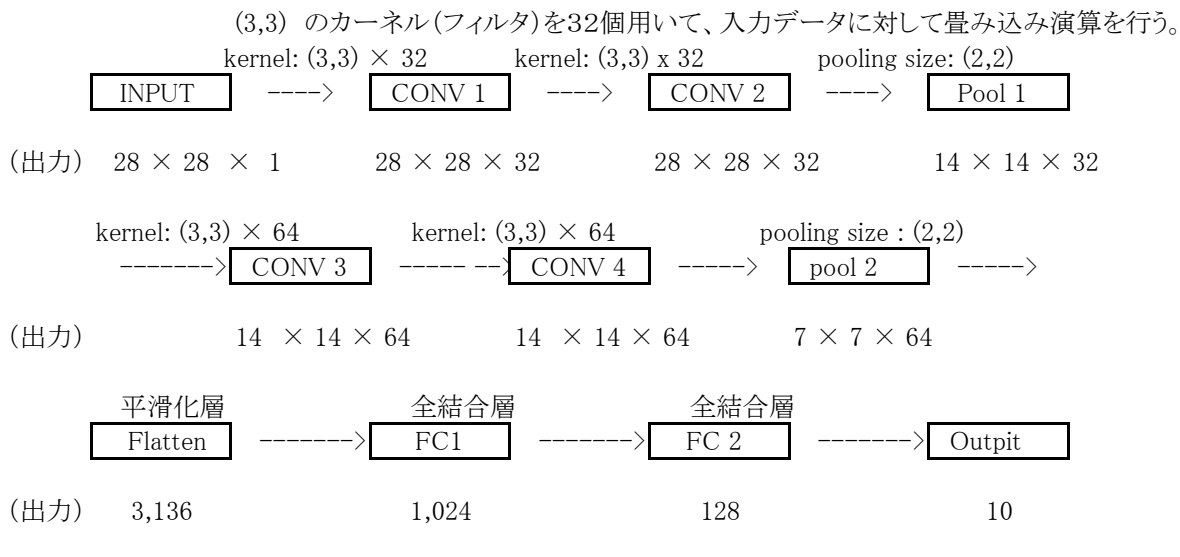
この場合には、 $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{w}$ が成り立つ。

CNNネットワークの構成と実装の概略。

画像データ分類ニューラルネットワークの簡単なモデル。

手書きの数字画像データから数字の正解ラベルを推定する、分類ニューラルネットワーク。

CNN構成図－1



- ・入力層 画像サイズ:(28,28)、カラーチャネル:1(モノクロ) の形状データを出力する。
 - ・CONV 1, CONV 2(畳み込み層)は、(3,3) のカーネル(フィルター) を32個使い、
入力データに畳み込み演算を行い、 $28 \times 28 \times 32$ の形状のデータを出力する。
 - ・pool 1 (プーリング層) は、(2, 2) のサイズでプーリング演算を行い、
 $14 \times 14 \times 32$ の形状のデータを出力する。
 - ・CONV 3, CONV 4(畳み込み層)は、(3,3) のカーネル(フィルター) を64個使い、
入力データに畳み込み演算を行い、 $14 \times 14 \times 64$ の形状のデータを出力する。
 - ・pool 2 (プーリング層) は、(2, 2) のサイズでプーリング演算を行い、
 $7 \times 7 \times 64$ の形状のデータを出力する。
 - ・Flatten (平滑化層)は、
 $7 \times 7 \times 64$ の形状をもったデータを $7 \times 7 \times 64 = 3,136$ 個の要素をもつ
1次元データに平滑化する。
 - ・FC1, FC2 (全結合層)は、それぞれ 1,024, 128 の要素をもつ1次元データを出力する。
 - ・OUTPUT(出力層)は、10個の要素をもつ1次元データを出力する。
この10個の要素それぞれが、0～9 のラベルである確率を表すように訓練を行う。
- (CONV : 畳み込み層。 Pool : プーリング層。 Flatten : 平滑化層。 FC : 全結合層)

•処理の分類。

1. データセットを読み込む処理。
2. ネットワークの構成を定義する処理。
3. モデルの訓練条件の設定の処理。
4. モデルを訓練する処理。

実装コーディング。 (CNN構成図-1の実装)

•手書きの数字画像データから数字の正解ラベルを推定する、分類ニューラルネットワーク。

•Keras 2.4 による Sequential モデルの実装。 10-018-01

•Keras 2.4 による Functional API の実装。 10-018-02

•Keras 2.4 による Subclassing の実装。 10-018-03
(モデルのサブクラス化)

•独自に用意した、5種類の文房具の画像データセットに対して、正解ラベル(文房具の種類)を推定する
(CNN構成図-2の実装) 画像分類ニューラルネットワーク。

•Keras 2.4 による Subclassing の実装。 10-018-04
(モデルのサブクラス化)

CNNモデルの実装 NO-1。（構成図-1） 「Sequential モデル」のサンプル。

手書きの数字画像データから数字の正解ラベルを推定する、分類ニューラルネットワーク。 NO-1
----- Keras 2.4

```

from tensorflow.keras.datasets import mnist
from tensorflow.keras.layers import conv2D, Dense, Flatten, MaxPooling2D
from tensorflow.keras.models import Sequential
from tensorflow.keras.optimizers import Adam
from tensorflow.keras.utils import to_categorical

# (1) データセット読み込み処理
(train_images, train_classes), (_, _) = mnist.load_data()           # コメントー1

train_images = train_images.reshape(60000, 28, 28, 1)              # コメントー2
train_images = train_images.astype('float32') / 255                 # コメントー3
train_classes = to_categorical(train_classes)                       # コメントー4

train_images = train_images[:1000]                                  # コメントー5
train_classes = train_classes[:1000]
train_images = train_images.reshape(60000, 28, 28, 1)
train_images = train_images.astype('float32') / 255
train_classes = to_categorical(train_classes)

train_images = train_images[:1000]
train_classes = train_classes[:1000]

# (2) ネットワークの構造を定義
model = Sequential()                                               # コメントー6
    # conv 1, conv 2, pool 1
model.add(Conv2D(32, (3,3),
    padding='same', activation='relu', input_shape=(28, 28, 1)))    # コメントー7
model.add(Conv2D(32, (3,3), padding='same', activation='relu'))
model.add(MaxPooling2D((2,2)))                                     # コメントー8

    # conv 3, conv 4, pool 2
model.add(Conv2D(64, (3,3), padding='same', activation='relu'))
model.add(Conv2D(64, (3,3), padding='same', activation='relu'))
model.add(MaxPooling2D((2,2)))

model.add(Flatten())        # Flatten

    # FC 1, FC 2, Output
model.add(Dense(1024, activation='relu'))                           # コメントー9
model.add(Dense(128, activation='relu'))
model.add(Dense(10, activation='softmax'))                          # コメントー10

# (3) モデルの訓練条件を設定
model.compile(
    optimizer=Adam(lr=1e-3),                                         # コメントー11
    loss='categorical_crossentropy',
    metrics=['accuracy'])

# (4) モデルを訓練する処理                                         # コメントー12
history = model.fit(train_images, train_classes, batch_size=128, epochs=10, validation_split=0.2)

```

一般化線形モデルと基底関数。主な基底関数の特徴。

独立変数と従属変数が、1対1で対応している場合は、「正規直交基底」で表現できる。

正規直交基底では、「次元」の数だけ変数を増やすことができる。3次元以上でも表現できる。
それぞれの座標軸は直交していて線形独立。

線形独立な独立変数の和(線形結合)でもって従属変数を表現しようとするのが「回帰分析」。

一般化線形モデルや、混合正規分布などの混合モデルでは、基底関数や基底関数の線形結合によってモデルを表現する。

主な基底関数。

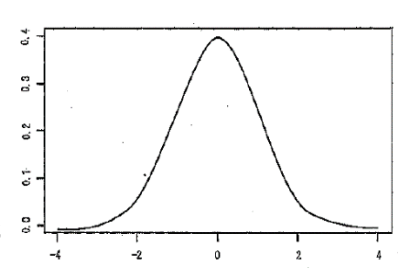
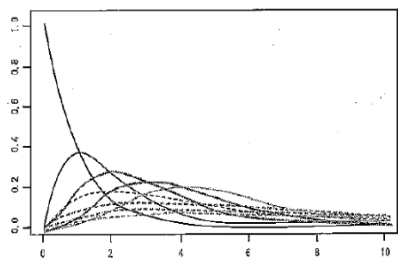
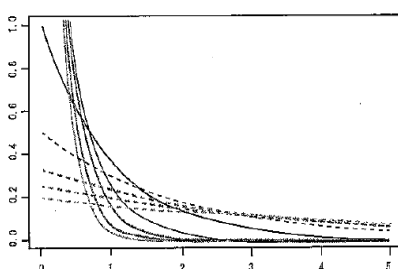
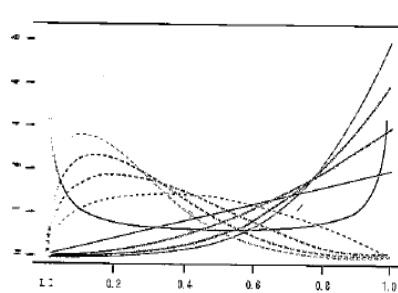
「連続確率分布」

正規分布、指数分布、カイ二乗分布、ガンマ分布、ローレンツ分布、ロジスティック分布、ベータ分布。

「離散確率分布」

二項分布、負の二項分布、ポアソン分布、超幾何分布、

・主な基底関数の特徴。

分布名	式	平均(期待値) 分散	
1. 正規分布 (ガウス分布)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ, σ^2	
自然界の事象は正規分布に従うものがある。 実験の測定誤差。社会現象。など 厳密にこの分布に従わない場合でも、計算やモデルの簡略化に使う場合がある。			
2. ガンマ分布	$f(x) = \frac{e^{-x/\theta}}{\Gamma(k)\theta^k}$	平均 : $k\theta$ 分散 : $k\theta^2$	
ガンマ分布の特別な場合として、 指数分布 $k=1$ のとき アーラン分布 k が整数の時 カイ二乗分布 k が半整数で $\theta=2$ の時			
3. 指数分布	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	平均 : $1/\lambda$ 分散 : $1/\lambda^2$	
事象が起こる時間間隔に関する確率分布。 λ は単位時間に起こる平均の回数。 事象が起こって、次に起こるまでの時間間隔に関する確率密度			
4. ベータ分布	$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, \quad B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$		
ベータ関数を用い、ベイズ統計では「事前分布」のモデルとして利用される。 α, β を変えることで様々な分布を表現できる。			
平均	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	分散	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

10. 量子最適クローニング。

- 量子最適クローニングは、1量子ビットの量子情報を、複数の受信者へと送信するシステムである。
それは可能か？

しかし「クローン禁止原理」(No cloning theorem)により1つの量子ビットから多数の完全に同じ状態のビットを作ることはできない。(この原理は量子量子暗号の安全性にとっては逆に有利になる)

- 完全な複製を作ることはできないが、「似たような複製」は複数つくることができる。それが量子最適クローニングである。
- 量子最適クローニングのからくりは、自由にクローニングできる「古典的情報部分」に追加して、「量子情報部分」を「うまい具合」に複数の量子ビットに分配することである。

量子状態で表される量子情報には、古典情報を表す部分が含まれている。古典的極限状態は、オリジナルの量子情報に含まれる古典的情報のみからなる状態である。

- 量子最適クローニングの手順。(1量子ビットの情報から2つの量子最適クローンを作る手順)

- オリジナルな量子ビットの「未知状態」は量子テレポーションの場合と同じ。

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

ユニタリー演算子 U によって量子最適クローンを作るには状態 $|0\rangle$ に初期化した量子ビットを2個追加した3量子ビット状態が必要になる。 $|\phi\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$

- 3量子ビットにユニタリー演算 U を施す。

$$|\psi\rangle = U|\phi\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle = \alpha|\psi_0\rangle + \beta|\psi_1\rangle$$

ただし $|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle$ は最適クローン基底という3量子ビットの状態である。

$$|\psi_0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle \otimes |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle \otimes (|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle \otimes |11\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle \otimes (|01\rangle + |10\rangle)$$

最初のビットは「補助量子ビット」(ancilla)で、状態 $|\phi\rangle$ を純粋状態に保つために必要。

- 2番目と3番目の量子ビットの「縮約密度行列」をとると、それぞれ同一のオリジナルに近い状態を与える。
それで3量子ビットの状態 $|\phi\rangle$ が、量子最適クローン状態といわれる。

- 密度縮約行列。

他のビットの情報なしに、その量子ビットのみから得られる状態の情報。
2番目のビットの密度縮約行列を計算する。

$$\rho_2 = \text{tr}_1 |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{5}{6}|\phi\rangle\langle\phi| + \frac{1}{6}|\phi_\perp\rangle\langle\phi_\perp|$$

オリジナルの状態と直交する状態 $|\phi\rangle, |\phi_\perp\rangle$ が混合する状態である。

- フィデリティ(fidelity)。

$$\text{オリジナル状態の比。 } F = \langle\phi|\rho_2|\phi\rangle = 5/6$$

3番目の量子ビットの状態も同じように量子最適クローンの状態を与える。

- ブロッホ球表示。

量子ビットの任意の純粋状態 $|\phi\rangle$ は以下のような $|0\rangle$ と $|1\rangle$ の重ね合わせで表現できる。

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle \\ &= \cos(\theta/2)|0\rangle + (\cos\theta + i\sin\phi)\sin(\theta/2)|1\rangle \end{aligned}$$

(θ, ϕ) をブロッホ球上の点の極座標とみなして量子ビットの純粋状態をブロッホ球上の「点」として視覚的に表現する。

ブロッホ球表示で表すと、状態のベクトルは、方向はオリジナルと同じいが、ベクトルの長さは、 $5/6 - 1/6 = 2/3$ になっている状態に対応する。

補助量子ビットの縮約密度行列を求めると、フィデリティは $F=2/3$ になる。

- 量子最適クローン状態は、3量子ビットからなるエンタングル状態である。

1. 個々の量子ビットの縮約密度行列の「積状態」を作っても量子最適クローン状態にはならない。
2. 無限個の量子最適クローンを作る場合、フィデリティは、 $2/3$ になり、古典的極限状態として知られる状態と同じフィデリティとなっている。
1つの量子ビットからN個の量子最適クローンを作る場合のフィデリティは

$$\gamma = \frac{2N+1}{3N}$$

11. テレクローニング。

多量子間のエンタングルメントを基にして使い、「量子最適クローン演算」と「量子通信」を同時に行う。

- 1 → 2 テレクローニング。

場所Aの1量子ビットの「未知量子状態」から、別の場所 B, C にいる2人の受信者へ「量子最適クローン状態」を送信する。

$$|\phi\rangle_A = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

量子通信経路は、それぞれ場所 A, X, B, C に分配された4量子ビットのエンタングル状態 $|\xi\rangle_{AXBC}$
X は、補助量子ビット(ancilla)で、純粋状態に保つために必要。

- 手 順。

1. 量子テレポーションと同様に、オリジナルノ入力量子ビット $|\phi\rangle_A$ を「ベル合同測定」によって量子通信経路に入力する。
2. ベル合同測定の結果を、場所 X, B, C にいる受信者に「古典的通信経路」で伝える。
3. 受信者たちは、それぞれ復元演算 U を、それぞれの出力ポートビットに施す。
4. すると場所 X, B, C にある3量子ビットの状態は、量子最適クローン状態 $|\Psi\rangle_{XBC}$ となる。

この3つの量子ビットのうち、場所 B と C にある出力ポート量子ビットの縮約密度行列
は、フィデリティ $\langle \phi | \rho | \phi \rangle = 5/6$ の量子最適クローンを出力する。

- 量子テレポーションの手順と異なることは、テレポーテーションとは違ったタイプのエンタングル状態であることと、受信者が複数であること。

- 1 → 2 テレクローニングの多量子ビットのエンタングル状態は、4量子ビットの状態。

$$\begin{aligned} |\xi\rangle_{AXBC} &= \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle_{AX} \otimes |00\rangle_{BC} + \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle_{AX} \otimes |11\rangle_{BC} \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}}(|01\rangle_{AX} + |10\rangle_{BC}) \otimes (|01\rangle_{AX} + |10\rangle_{BC}) \end{aligned}$$